Eksakta Vol.18 No.2 Oktober 2017
http://eksakta.ppj.unp.ac.id
E-ISSN : 2549-7464
P-ISSN : 1411-3724

INTERVAL KEKONTRAKTIFAN PEMETAAN PADA RUANG BANACH

Badrulfalah[1], Khafsah Joebaedi.[2]

[1)]Departemen Matematika, FMIPA Universitas Padjajaran Bandung
[2)]Departemen Matematika FMIPA Universitas Padjajaran Bandung
badrulfalah@gmail.com, khafsah.jbd@gmail.com

ABSTRAK

Pemetaan tipe kondisi kontraktif merupakan perluasan dari pemetaan kontraktif. Ada beberapa bentuk tipe kondisi kontraktif. Masing-masing pemetaan tipe kondisi kontraktif dapat memiliki interval konstanta kekontraktifan berlainan. Pada makalah ini akan dibahas tentang interval konstanta kekontraktifan pemetaan pada ruang Banach khususnya pemetaan tipe kondisi kontraktif yang didefinisikan pada ruang Banach yang merupakan *self mapping*. Pembahasan dilakukan dengan menunjukkan bahwa fungsi kombinasi dari pemetan kondisi tipe kontraktif dengan koefisien tertentu, memenuhi teorema Fisher. Selanjutnya ditentukan interval kekontraktifan yang sesuai dengan kondisi konstanta kontraktif. Hasilnya adalah pada interval tertentu pemetaan tipe kondisi kontraktif terkait memiliki titik tetap tunggal.

Keywords : *Ruang metrik lengkap,ruang Banach, titik tetap, pemetaan tipe kondisi kontraktif*

PENDAHULUAN

Kekontraktifan merupakan syarat cukup sebuah pemetaan pada ruang metrik lengkap memiliki titik tetap tunggal. Konstanta kekontraktifan pemetaan kondisi kontraktif adalah bilangan nonnegatif lebih kecil dari satu [4]. Tapi tidak demikian untuk pemetaan kondisi tipe kontraktif. Sebagai perluasan dari kondisi kontraktif, kondisi tipe kontraktif memiliki bentuk pertidaksamaan yang memuat satu atau lebih konstanta kontraktif. Akibatnya pemetaan kondisi tipe kontraktif dapat memiliki lebih dari satu interval konstanta kekontraktifan. Ada banyak kajian tentang pemetaan kondisi tipe kontraktif di antaranya adalah kondisi tipe kontraktif Kannan, Fisher[2], Chatterjee[5]. Ketiganya memiliki interval kekontraktifan yang sama. Kajian yang berbeda dilakukan Dixit pada [1]. Dixit membuktikan teorema ketunggalan titik tetap pemetaan kondisi tipe kontraktifnya menggunakan teorema Fisher melalui fungsi kombinasi beserta generalisasinya. Selain itu Khosravi [3] membuktikan hal yang sama,dengan Dixit tetapi dengan kondisi tipe kontraktif dan bentuk koefisien yang berbeda. Keduanya menghasilkan interval kekontraktifan berlainan tergantung pada bilangan asli pada masing-masing koefisien. Berdasarkan pada hasil pada [1] dan [2] pada paper ini akan dibahas interval kekontraktifan dari pemetaan tipe kondisi kontraktif pada [3] dengan koefisen fungsi kombinasi berbentuk bilangan rasional. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

menentukan n dimana interval kekontraktifan pada n tersebut pemetaan memenuhi kondisi kontraktif Fisher.

METODE PENELITIAN

Untuk mendapatkan interval kekontraktifan dari suatu pemetaan self mapping pada ruang Banach dilakukan langkah-langkah berikut: Pertama-tama mengkaji beberapa teorema pemetaan kondisi tipe kontraktif di ruang metrik lengkap . Kedua menetapkan bentuk kondisi tipe kontraktif beserta koefisien kondisi tipe kontraktif nya. Ketiga mendefinisikan fungsi kombinasi dan koefisien variabelnya. Selanjutnya menunjukkan bahwa fungsi kombinasi yang didefinisikan memenuhi kondisi tipe kontraktif Fisher. Terakhir menentukan interval konstanta kekontraktifan yang membuat pemetaan memiliki titik tetap tunggal.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Beberapa Kondisi Tipe Kontraktif

Sebelum membahas beberapa pemetaan kondisi tipe kontraktif pada ruang Banach terlebih dahulu diberikan beberapa definisi dan lemma terkait berikut.

Pada Definisi 1.1 diberikan definisi titik tetap.

Definisi 1.1: Misalkan(X, d) ruang metrik dan $f: X \rightarrow X$. $x \in X$ dikatakan titik tetap dari f jika $d(f(x),x) = 0$. [4]

Pada Definisi 1.2 diberikan definisi kondisi kontraktif.

Definisi 1.2: Misalkan(X, d) ruang metrik dan $f: X \rightarrow X$. f dikatakan memenuhi kondisi kontraktif jika terdapat $\alpha \in [0,1)$ sedemikian sehingga $d(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y), \forall x, y \in X$.[4]

Pada Lemma 1.3 diberikan teorema titik tetap pemetaan kondisi kontraktif pada ruang Banach.

Lemma 1.3: Misalkan (X, d) ruang Banach dan $f: X \rightarrow X$. Jika f kontraktif maka f memiliki titik tetap tunggal.[4]

Pemetaan kondisi tipe kontraktif diperoleh dengan memodifikasi kondisi pemetaan kontraktif. Ada beberapa kondisi tipe kontraktif, di antaranya adalah Kannan, Fisher, Chatterjee, dan Dixit masing-masing kondisi berbentuk seperti yang diberikan berturut-turut pada Definisi 1.4, Definisi 1.5, Definisi 1.6, dan Definisi 1.7 berikut.

Definisi 1.4: Misalkan (X, d) ruang metrik lengkap dan $f: X \rightarrow X$. f dikatakan memenuhi kondisi tipe kontraktif Kannan jika

$$d(f(x),f(y)) \leq \alpha[d(f(x),x) + d(f(y),y)] \quad (1)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$. [2]

Fisher memodifikasi kondisi tipe kontraktif Kannan. Definisinya dinyatakan seperti pada Definisi 1.5 berikut.

Definisi 1.5: Misalkan (X, d) ruang metrik lengkap dan $f: X \rightarrow X$. f dikatakan memenuhi kondisi tipe kontraktif Fisher jika

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

$d(f(x),f(y)) \leq \alpha[d(f(x),x) + d(f(y),y)] + \beta d(x,y)$
(2)

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha,\beta \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.[2]

Pada Definisi 1.6 diberikan kondisi tipe kontraktif Chatterjee.

Definisi 1.6: Misalkan (X,d) ruang metrik lengkap dan $f: X \rightarrow X$. f dikatakan memenuhi kondisi tipe kontraktif Chatterjee jika
$d(f(x),f(y)) \leq \alpha[d(f(x),y) + d(f(y),x)]$
(3)

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.[5]

Selanjutnya Dixit memodifikasi kondisi tipe kontraktif Chatterjee, seperti diberikan pada Definisi 1.7.

Definisi 1.7: Misalkan (X,d) ruang metrik lengkap dan $f: X \rightarrow X$. f dikatakan memenuhi kondisi tipe kontraktif Dixit jika
$d(f(x),f(y)) \leq \alpha[d(f(x),y) + d(f(y),x)] - d(x,y)$
(4)

untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.[1]

Teorema ketunggalan titik tetap pemetaan kondisi tipe kontraktif Fisher pada ruang metrik lengkap dinyatakan seperti pada Lemma 1.8 berikut.

Lemma 1.8: Misalkan (X,d) ruang metrik lengkap dan $f: X \rightarrow X$. Jika f memenuhi
$d(f(x),f(y)) \leq \alpha[d(f(x),x) + d(f(y),y)] + \beta d(x,y)$
untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha,\beta \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, maka f memiliki titik tetap tunggal di X.[2]

Dixit membuktikan ketunggalan titik tetap pemetaan kondisi tipe kontraktifnya menggunakan teorema titik tetap Fisher melalui fungsi kombinasi yang digeneralisasi. dinyatakan seperti pada Lemma 1.9.

Lemma 1.9: Misalkan (X,d) ruang metrik lengkap dan $f: X \rightarrow X$. Jika f memenuhi kondisi (4) untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \left[\frac{1}{2k},\frac{3}{4k}\right]$, maka f memiliki titik tetap tunggal di X dimana $g: X \rightarrow X$ dengan $g(x) = f(kx) - (k-1)x$.[1]

Selanjutnya Khosravi pada [3] membuktikan ketunggalan titik tetap pemetaan kondisi tipe kontraktif bentuk lain seperti dinyatakan pada Lemma 1.10 berikut:

Lemma 1.10: Misalkan (X,d) ruang metrik lengkap dan $f: X \rightarrow X$. Jika f memenuhi kondisi
$d(f(x),f(y)) \leq \alpha\left[d(f(x),x) + d(f(y),y) - \frac{k}{2}d(x,y)\right]$
untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \left[\frac{1}{2k},\frac{1}{k}\right]$ sedemikian sehingga $k \in \{3,4,5,\ldots\}$ maka f memiliki titik tetap tunggal di X dimana $g: X \rightarrow X$ dengan $g(x) = f(2x) - x$. [3]

Mengacu pada Lemma 1.8, Lemma 1.9 dan Lemma 1.10 pada bagian selanjutnya dibuktikan interval kekontraktifan pemetaan dengan kondisi tipe kontraktif pada [3] untuk kasus $k = 2$ dan koefisien fungsi kombinasi berbentuk bilangan rasional yang memenuhi kondisi konstanta kondisi tipe kontraktif Fisher.

2. Interval Kekontraktifan Pemetaan Kondisi Tipe Kontraktif

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Interval kekontraktifan dari pemetaan kondisi tipe kontraktif dengan koefisien fungsi kombinasi berbentuk bilangan rasional dinyatakan seperti pada teorema 2.1 berikut.

Teorema 2.1: Misalkan (X,d) ruang metrik lengkap dan $f: X \to X$. Jika f memenuhi kondisi $d(f(x),f(y)) \leq \alpha[d(f(x),x) + d(f(y),y) - d(x,y)]$ untuk setiap $x,y \in X$ dan $\alpha \in \left[\frac{1}{n+1} - \frac{n}{2(n+1)}, \frac{1}{n+1}\right]$, dimana $n = 1,2$ maka f memiliki titik tetap tunggal di X dimana $g: X \to X$ dengan $g(x) = f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{1}{n}x$.
(5)

Bukti:

$$d(g(x), g(y))$$

$$= d\left(f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{1}{n}x, f\left(\frac{n+1}{n}y\right) - \frac{1}{n}y\right)$$

$$= \left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{1}{n}x - f\left(\frac{n+1}{n}y\right) + \frac{1}{n}y \right\|$$

$$\leq \left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - f\left(\frac{n+1}{n}y\right) \right\| + \left\| \frac{1}{n}x - \frac{1}{n}y \right\|$$

$$\leq \left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - f\left(\frac{n+1}{n}y\right) \right\| + \frac{1}{n}\|x - y\|$$

$$\leq \alpha\left[\left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{n+1}{n}x \right\| + \left\| f\left(\frac{n+1}{n}y\right) - \frac{n+1}{n}y \right\| - \left\| \frac{n+1}{n}x - \frac{n+1}{n}y \right\|\right] + \frac{1}{n}\|x - y\|$$

$$\leq \alpha\left[\left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{n+1}{n}x \right\| + \left\| f\left(\frac{n+1}{n}y\right) - \frac{n+1}{n}y \right\| - \frac{n+1}{n}\|x - y\|\right] + \frac{1}{n}\|x - y\|$$

$$\leq \alpha\left[\left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{n+1}{n}x \right\| + \left\| f\left(\frac{n+1}{n}y\right) - \frac{n+1}{n}y \right\|\right] - \alpha\frac{n+1}{n}\|x - y\| + \frac{1}{n}\|x - y\|$$

$$\leq \alpha\left[\left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{n+1}{n}x \right\| + \left\| f\left(\frac{n+1}{n}y\right) - \frac{n+1}{n}y\right.$$

$$\leq \alpha\left[\left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{n+1}{n}x \right\| + \left\| f\left(\frac{n+1}{n}y\right) - \frac{n+1}{n}y \right\|\right] + \left(\frac{1}{n} - \alpha\frac{n+1}{n}\right)\|x - y\|$$

$$= \alpha\left[\left\| f\left(\frac{n+1}{n}x\right) - \frac{n+1}{n}x \right\| + \left\| f\left(\frac{n+1}{n}y\right) - \frac{n+1}{n}y \right\|\right] + \beta\|x - y\|$$

di mana $\frac{1}{n} - \alpha\frac{n+1}{n} = \beta$, $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$.

Dengan demikian g memenuhi kondisi Lemma 1.8. Akibatnya g memiliki titik tetap tunggal di X, misal p. Berdasarkan Definisi 1.1 maka $d(g(p),p) = 0$. Ini berarti $g(p) = p$. Berdasarkan persamaan (5) maka $g(p) = f\left(\frac{n+1}{n}p\right) - \frac{1}{n}p = p$. $f\left(\frac{n+1}{n}p\right) - \frac{1}{n}p = p$. Jadi $f(c) = c$, dengan $c = \frac{n+1}{n}p$. Oleh karena itu f memiliki titik tetap tunggal.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa pemetaan self mapping kondisi tipe kontraktif (4) yang didefinisikan pada ruang Banach dengan

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

koefisien dari variabel fungsi kombinasi berbentuk bilangan rasional seperti pada persamaan (5) memiliki interval kekontraktifan yang memenuhi Teorema Fisher jika $n = 1,2$. Pada interval ini pemetaan memiliki titik tetap tunggal.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dixit. H, and Bhargav, R. 2016. *A Fixed Point Theorem For Self Mapping In Banach Space*. International Journal of Advance Research in Science and Engineering, vol. no. 5, pp. 382–385.

[2] Fisher,. 1976. *A Fixed Point Theorem for Compact Space*. Publ.Inst.Math, 25, pp.193–194.

[3] Khosravi H., Kahrobaeian M., Faryad E., Jafari P. ,. 2013. *A Fixed Point Theorem For Self Mapping In Banach Space*, Research Journal Of Pure Algebra-3(4), , page: 149-152

[4] Kreyszig E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons,.

[5] S.K. Chatterjee., 1972. *Fixed point theorems comp*., Rend. Acad. Bulgare Sci, vol.25, pp 727-730.