Eksakta Vol. 18 No. 2, Oktober 2017
http://eksakta.ppj.unp.ac.id
E-ISSN : 2549-7464
P-ISSN : 1411-3724

PERBANDINGAN DAN KARAKTERISTIK BEBERAPA TES KONVERGENSI PADA DERET TAK HINGGA

Dewi Murni

Prodi Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Padang
dewimunp@gmail.com

ABSTRACT

The infinite series is an infinite sum of elements of a sequence of real numbers. A main thing related to the infinite series is to determine its convergence (convergent or divergent). Purpose this research were to analyze and determine a comparison and characteristics of each convergence test, such as: D'Alembert test, Raabe test, Gauss's test, Cauchy's Root Test, and Logarithm Test. A method used descriptive method by analyzing theories relevant to the problems discussed and based on literature study.The results showed that each convergence test had characteristics for its convergence test. The D'Alembert Ratio test is easier to use in a series that contains the form$n!$,r^n, and n^n. Raabe test used if the ratio test obtained value limit comparison is, so the test does not give conclusion. Whereas logarithmic test is used in the infinite series that contains the logarithmic form. The Cauchy *n*-th root test, can be used to determine the absolute series convergence of the nth power.

Keyword: Convergence test, convergence

PENDAHULUAN

Deret tak hingga merupakan penjumlahan tak berhingga dari elemen-elemen suatu barisan bilangan riil. Misalkan (a_n) barisan bilangan riil maka :

$$\sum_{1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

disebut deret tak tak hingga dari barisan (a_n). Selanjutnya jika $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ . \ . \ . \ , S_n = a_1 + a_2 + \ ... + a_n$, maka S_n disebut jumlah parsial ke n dari deret tak hingga $\sum_1^\infty a_n$. Hal utama yang berkaitan deret tak hingga adalah menentukan apakah suatu deret konvergen atau divergen. Jika deret tersebut konvergen maka $\lim_{n\to\infty} S_n$ ada, artinya jumlah tak berhingga dari dari suku-suku barisan a_n menuju nilai tertentu tetapi jika $\lim_{n\to\infty} S_n$ tidak ada atau menuju nilai tak hingga maupun negatif tak hingga maka deret tersebut disebut divergen.

Deret tak hingga mempunyai bermacam bentuk mulai dari yang sederhana seperti: deret aritmatika, deret geometri dan deret-p, sampai pada deret yang tidak sederhana, seperti :

$$\sum_1^\infty \frac{\sqrt{n}}{n^5+5} \ , \quad \text{atau} \quad \sum_1^\infty \frac{\sin(nx)}{n}.$$

atau deret berbentuk :

$$\frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2 4^2}{3^2 5^2} + \frac{2^2 4^2 6^2}{3^2 5^2 7^2} + \cdots$$

Untuk deret deret sederhana seperti deret aritmatika, deret geometri

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

dan deret-p ,biasanya dengan mudah dapat ditentukan karena sudah ada formulanya yang baku yang langsung dapat diterapkan sehingga hasilnya sekaligus dapat ditentukan apakah konvergen atau tidak . Tetapi jika deret tersebut tidak dalam bentuk sederhana maka untuk menentukan kekonvergenannya perlu suatu analisis dahulu terhadap bentuk dan polanya kemudian baru memilih formula (tes konvergensi) yang cocok yang sesuai dengan karakteristik masing- masing tes konvergensi.

Beberapa tes konvergensi yang dapat digunakan berkaitan dengan menentukan kekonvergenan deret tak hingga antara lain : Uji banding, Uji rasio atau uji rasio mutlak,uji integral, uji Kummers, uji *Bertrand-DeMorgan's*, uji *Gauss's*, uji akar *Cauchy's*, uji *Dirichlet* . Pada masing- masing uji konvergensi mempunyai karakteristik tertentu dan mempunyai penurunan rumus yang berbeda- beda. Beberapa uji konvergensi diatas sudah sangat sering digunakan, maka pada penelitian ini peneliti memfokuskan pada uji konvergensi : Tes D'Alembert,Tes Raabe, uji, uji *Gauss's*, Tes akar *Cauchy's*, dan Tes Logaritma. Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: "bagaimanakah perbandingan dan karakteristik Tes konvergensi: Tes D'Alembert,Tes Raabe, uji, uji *Gauss's*, Tes akar *Cauchy's*, dan Tes Logaritma **?"**

Beberapa deret tak hingga yang sering dipakai adalah :

1. Deret geometri berbentuk :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

Jumlah n suku dari deret geometri adalah

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

jika $|r| < 1$, maka untuk $n \to \infty$ akibatnya $r^n = 0$.

Jadi $S_\infty = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

di mana $a \neq 0$ disebut deret geometrik .

(Stroud.KA ; hal.46)

Dapat ditunjukkan bahwa sebuah deret geometrik konvergen dengan jumlah S $=\frac{a}{1-r}$, jika $|r| < 1$, tetapi divergen jika $|r| \geq 1$.

2.Deret tak hingga deret-p berbentuk :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

Maka: (i) deret akan konvergen jika $p > 1$

(ii) deret divergen jika $p \leq 1$

(E.Purcell;hal.46)

Selanjutnya akan diuraikan sifat-sifat deret tak hingga :

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k;$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$

Definisi 1.

Deret takterhingga konvergen dan mempunyai jumlah S jika barisan jumlah-jumlah parsial { S_n } konvergen menuju S. Jika { S_n } divergen, maka deret tersebut divergen. Deret divergen tidak mempunyai jumlah. (E.Purcell;hal.74)

Perhatikan deret geometrik $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$sekali lagi. Suku ke-*n* dari $a_n$dinyatakan dengan$a_n = a^{n-1}$. Contoh 1 menunjukan bahwa deret geometrik akan konvergen jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Berikut adalah beberapa teorema berkaitan kekonvergenan deret tak hingga.

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Teorema1. Uji Suku ke-n untuk Divergensi

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Secara ekivalen, jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ atau jika $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada, maka deret tersebut divergen. (E.Purcell;hal.75)

Bukti : Misalkan S_n adalah jumlah parsial ke-n dan $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Perhatikan bahwa $a_n = S_n - S_{n-1}$. Karena $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S$, maka

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Pandang deret harmoikberikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Menunjukan bahwa hal ini tidak benar. Dapat dilihat dengan jelas bahwa $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$. Walaupun demikian, deret itu divergen, sebagaimana yang akan diperhatikan berikut ini.

Contoh : Deret harmonik adalah divergen.

Misalkan jumlah n suku deret harmonik adalah:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Maka $S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Jadi deret harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ adalah divergen.

Berikut sifat-sifat deret konvergen :

Jika $\sum_{i=1}^{=} a_i$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ keduanya adalah konvergen dan c sebuah konstanta maka :

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} c a_i$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$

adalah konvergen. (E.Purcell; hal.77)

Teorema 2

Jika $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ adalah deret dan entri-entri non negatif dan $S_n = a_1 + a_2 + \ \ldots + a_n$, maka

(i). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika barisan (S_n) terbatas

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen jika barisan (S_n) tidak terbatas. (Wasan; hal.56)

Teorema 3

Misalkan $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall\, n \geq m$, dimana m bilangan bulat positif, maka :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen.(Wasan;hal.56)

Teorema 4 (Tes Perbandingan Limit)

Misalkan $a_n, b_n > 0, \forall\, n \geq 1$ dan $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, dimana L adalah bilangan real positif, maka $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n\to 1}^{\infty} b_n$ keduanya konvergen atau keduanya divergen. (Wasan; hal.57)

Bukti :

Karena $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, pilih $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$. maka ada bilangan bulat positif m sehingga setiap n $\geq$m , $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2}$ maka $0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$.

Akibatnya : $\frac{Lb_n}{2} < a_n < \frac{3Lb_n}{2}$.

Dengan teorema perbandingan maka kesimpulan terbukti.

Teorema 5. Uji Integral .

Misalkan f adalah fungsi yang kontinu, positif, dan tak menaik pada selang $[1, \infty)$ dan andaikan $a_k = f(k)$untuk seluruh bilangan bulat positifk. Maka deret tak hingga : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergen.

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Contoh penggunaan uji integral pada pembuktian deret-p.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$$

Maka : (i) deret akan konvergen jika $p>1$

(ii) deret divergen jika $p\leq 1$

Bukti : Jika $p\geq 0$, maka fungsi $f(x)=\frac{1}{x^p}$ adalah kontinu, positif, dan tak naik pada $[1,\ \infty)$ dan $f(k)=\frac{1}{k^p}$. Maka menurut uji integral , $\sum_{n=1}\frac{1}{x^p}$ konvergen jika dan hanya jika $\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx$ ada.

Jika $p\neq 1$, $\int_1^t x^{-p}dx==[\frac{x^{1-p}}{1-p}]_1^t$ $=\frac{t^{1-p}-1}{1-p}$

Jika p=1, $\int_1^t x^{-1}dx=[lnx]_1^t=\ln t$

Karena $\lim_{t\to\infty}t^{1-p}=0$ jika p>1 dan $\lim_{t\to\infty}t^{1-p}=\infty$ jika p< 1.

Karena $\lim_{t\to\infty}\ln t=\infty$, kita dapat menyimpulkan bahwa deret p konvergen jika p>1 dan divergen jika $0\leq p\leq 1$.

Jika p < 0, maka -p > 0 sehingga suku ke-n dari deret adalah $\frac{1}{n^p}=n^{-p}$

Maka $\lim_{n\to\infty}n^{-p}\neq 0$, sehingga deret divergen. Sedangkan jika p=1, maka yang terbentuk adalah deret Harmonik yang divergen.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian dasar. Metode yang digunakan adalah metode deskriptif dengan menganalisis teori-teori yang relevan dengan permasalahan yang dibahas dan berlandaskan studi kepustakaan.

Langkah-langkah dalam menjawab permasalahan adalah sebagai berikut:

1. Mencari teori-teori yang berkaitan deret tak hingga dan kekonvergenan
2. Menghubungkan teori-teori yang ada dengan permasalahan penelitian.
3. Mengkaji perbandingan dan karakteristik masing- masing uji konvergensi: , uji Kummers, uji *Bertrand-DeMorgan's*, uji *Gauss's*, uji akar *Cauchy's*, uji *Dirichlet*
4. Melakukan pembahasan dan interpretasi dari pembahasan yang telah dilakukan

HASIL PEMBAHASAN

Akan dibahas beberapa tes kekonvergenan yang khusus yang memuat bentuk akar atau yang memuat fungsi logaritma.

1.Tes Rasio (D'Alembert's Ratio test)

Misalkan $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=L$, maka :

a. Jika L > 1 maka $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergen
b. Jika L < 1 maka $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergen
c. Jika L = 1 maka $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ tidak ada kesmpulan
d. Jika L = ∞maka $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergen

Bukti:

a.Misalkan L > 1, maka L – 1 > 0, pilih ε> 0 ∋

L – 1 >ε>0 maka R = L- ε> 1.

Karena $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=L$, maka ∃ K ∈ N ∃∀ n≥ K

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}-L\right|<\varepsilon\leftrightarrow R=L-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n+1}}<L+\varepsilon$

Jadi $\frac{a_k}{a_{k+1}}>R,\ \ldots\ \frac{a_{n-1}}{a_n}>R$,∀ n≥ K

Akibatnya: $a_k>a_{k+1}R>a_{k+2}R\ R>\ldots>a_nR^{n-k}$

sehingga diperoleh: $\frac{a_k}{a_n}>R^{n-k}$, ∀ n≥ K

atau $\frac{a_n}{a_k}<\frac{1}{R^{n-k}}$

$a_n<\frac{a_kR^k}{R^n}\ \leftrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_kR^k}{R^n}$ $=\sum_{n=1}^{\infty}a_kR^k\left(\frac{1}{R^n}\right)$

Karena R > 1 maka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_kR^k}{R^n}$ konvergen akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ juga konvergen.

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Misalkan L <1 maka 1-L >0, Pilih ε = 1- L > 0 atau L + ε =1

Karena $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = L$, maka $\exists K \in N \ni \forall n \geq K$ berlaku $:\left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - L\right| < \varepsilon \leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n+1}} < L + \varepsilon = 1$

Dari pertidaksamaan sebelah kanan diperoleh $:a_n < a_{n+1}$

Karena barisan a_n merupakan barisan naik dan positif maka $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ sehingga dapat disimpulkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

c) Misalkan L =1 .

Pandang: (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Pandang:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{n+1}{1} = 1$ dan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergen.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Dan

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(n+1)^2}{1}) = 1$

dan$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergen

Dari (i) dan (ii) terlihat bahwa untuk L=1 tidak memberi kesimpulan apakah deret konvergen atau divergen.

d). Jika L = ∞, yaitu : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \infty$

Dari definisi limit tak hingga , maka $\exists\beta > 1, \exists K \in N \ni \frac{a_n}{a_{n+1}} > \beta,\ \forall n \geq K$

$a_k > \beta a_{k+1} > \beta\beta a_{k+2} > \cdots > a_n\beta^{n-k}$

Sehingga diperoleh : $\frac{a_k\beta^k}{\beta^n} > a_n$

atau $a_n < \frac{a_k\beta^k}{\beta^n}$

Karena $\beta > 1$,maka $\to \frac{1}{\beta} < 1$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_k\beta^k\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$ konvergen.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_k\beta^k\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$ sehingga, berdasarkan teorema perbandingan maka disimpulkan : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

Contoh : Tentukanlah kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

Jawab : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2} = \infty > 1$

Berdasarkan tes Rasio maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ konvergen.

2. Tes Raabe (Raabe's Test)

Misalkan $a_n > 0, \forall n \in N$,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$$

a. Jika L∈R maka: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika L>1, (ii)$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen jika L<1 dan (iii) Tidak ada kesimpulan jika L=1
b. Jika L = ∞, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
c. Jika L = $-\infty$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Bukti :

a. Jika L bernilai Real.

(i) Misalkan L > 1.

Karena L>1 , Ambil $\varepsilon = \frac{L-1}{2} > 0$.

Karena $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$ maka $\exists m \in N \ni \forall n \geq m$

Maka $\left|n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - L\right| < \varepsilon$, sehingga $L - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < L + \varepsilon$.

Dari ruas kiri yaitu $L - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ maka $\frac{L+1}{2} < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

Jika kedua ruas dikurang dengan 1 maka diperoleh:$\varepsilon = \frac{L-1}{2} < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1 = n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)$

Maka $\varepsilon a_{n+1} < na_n - (n+1)a_{n+1}, \forall n \geq m$.

Untuk,, n>m,$\varepsilon a_{m+1} < ma_m - (m+1)a_{m+1}$,$a_{m+2} < (m+1)a_{m+1} - (m+2)a_{m+2}$, . . . ,

$\varepsilon a_n < (n-1)a_{(n-1)} - na_n$.

Jika masing-masing pertidaksamaan ditambahkan maka diperoleh:

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

$\varepsilon(a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < ma_m - na_n < ma_m$ karena $na_n > 0$.
Untuk n>m, $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \left(\frac{m}{\varepsilon}\right) a_m$
Misalkan $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
maka $S_n - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \left(\frac{m}{\varepsilon}\right) a_m$
Akibatnya $S_n < S_m + \left(\frac{m}{\varepsilon}\right) a_m$.
Jadi barisan (S_n) adalah terbatas diatas , untuk setiap n>m, maka menurut teorema 5 maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.
(ii) Jika L < 1, Pilih $\varepsilon > 0$ dengan $\varepsilon = 1 - L atau L + \varepsilon = 1$. Karena $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L$ maka $\exists m \in N \ni \forall n \geq m$
Maka $\left|n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - L\right| < \varepsilon$, sehingga $L - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < L + \varepsilon = 1$
Dari pertidaksamaan ruas kanan yaitu: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < L + \varepsilon = 1$, diperoleh
$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < \frac{1}{n} \leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n}$$
Jadi untuk n>m, $\frac{a_m}{a_{m+1}} < \frac{m+1}{m}, \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} < \frac{n+2}{n+1}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{n}{n-1}$
Sehingga : $\frac{a_m}{a_n} < \frac{n}{m}$ atau $a_n > (ma_m)\frac{1}{n}$.
Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen
(iii) Jika L=1. Ambil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, maka $a_n = \frac{1}{n}$ sehingga $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$ dimana $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen. Selanjutnya ambil pula $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log)^n}$. Maka $a_n = \frac{1}{n(\log)^n}$, sehingga $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$, tetapi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log)^n}$ konvergen.
Dari kedua contoh deret disimpulkan bahwa L=1 tidak memberi kesimpulan kekonvergenan.
b. Jika L =∞ , ambil β=2 >0, maka $\exists m \in N \ni \forall n \geq m$,maka $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 2$, Dari kasus 1 ambil $\varepsilon = 2$, Untuk n>m, $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \left(\frac{m}{\varepsilon}\right) a_m$
Misalkan $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ maka $S_n - S_m < \left(\frac{m}{\varepsilon}\right) a_m$
Akibatnya $S_n < S_m + \left(\frac{m}{\varepsilon}\right) a_m$.
Jadi barisan (S_n) adalah terbatas diatas , untuk setiap n>m, maka menurut teorema 5 maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.
c. Jika L=−∞. ambil β=1 $\in R$, maka $\exists m \in N \ni \forall n \geq m$,
maka $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$. Dari sini diperoleh $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < \frac{1}{n} \leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n}$
Jadi untuk n>m, $\frac{a_m}{a_{n+1}} < \frac{m+1}{m}, \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} < \frac{n+2}{n+1}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{n}{n-1}$
Sehingga : $\frac{a_m}{a_n} < \frac{n}{m}$ atau $a_n > (ma_m)\frac{1}{n}$.
Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen
Contoh:
Diberikan deret : $\frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}x + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}x^2 + \ldots \quad (x > 0)$
Tentukanlah kekonvergenan deret tersebut.
Jawab
Misalkan suku ke-n dari dari deret adalah : $a_n = \frac{2.4.6.\ldots(2n+2)}{3.5.7\ldots(2n+3)}x^n$
Pandang : $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n+5)}{(2n+4)}\frac{1}{x} = \frac{(1+\frac{5}{2n})}{(1+\frac{4}{2n})}\frac{1}{x}$
sehingga $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{x}$

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Berdasarkan teorema rasio : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konvergen jika $\frac{1}{x} > 1\, dan divergen jika \frac{1}{x} < 1$, akibatnya deret konvergen jika x< 1 dan divergen jika x>1.
Maka untuk x = 1, maka pakai teorema Raabee,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Pandang $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2n+4}$, maka $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{2}$.
Karena nilai limit kecil dari 1 maka deret divergen.
3. Tes logaritma (Logarithmic Test).
Misalkan, $a_n > 0$,

$$\forall n \in N dan \lim_{n\to\infty} n log \frac{a_n}{a_{n+1}} = L$$

1. Jika L∈R maka: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika L>1, (ii)$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen jika L<1 dan (iii) Tidak ada kesimpulan jika L=1
2. Jika L = ∞, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen
3. Jika L = $-\infty$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Bukti :
1.(i) Misalkan L > 1. Pilih $\varepsilon > 0$ sehingga p = L-ε> 1.
Karena $\lim_{n\to\infty} n log \frac{a_n}{a_{n+1}} = L$, maka ada bilangan asli m sehingga $\forall n \geq m$ berlaku $\left|n log \frac{a_n}{a_{n+1}} - L\right| < \varepsilon$ atau
p = L-ε<$n log \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Selanjutnya $\frac{p}{n} < log \frac{a_n}{a_{n+1}}$ maka $e^{p/n} < \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Barisan ini adalah barisan naik. Barisan $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$ adalah barisan tak turun yang konvergen ke- e, sehingga $\left((1+\frac{1}{n})^n\right) < e$.
Pandang : $\left((1+\frac{1}{n})^p\right) = \left((1+\frac{1}{n})^{n.p/n}\right) < e^{p/n} < \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Maka $\frac{a_n}{a_{n+1}} > (\frac{n+1}{n})^p = \frac{(\frac{1}{n})^p}{(\frac{1}{n+1})^p}$. Misalkan $b_n = (\frac{1}{n})^p$ dan $b_{n+1} = (\frac{1}{n+1})^p$.
Maka $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}}$ untuk setiap n ≥ m.
Jadi untuk n > m, maka $\frac{a_m}{a_n} > \frac{b_m}{b_n}$

$$a_n < \left(\frac{a_m}{b_m}\right) b_n$$

Jika p >1 maka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ adalah konvergen.
Maka berdasarkan uji banding manaka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah konvergen.
(ii) Misalkan L < 1. Pilih $\varepsilon > 0\, sehingga\, 1 - L = \varepsilon atau L + 1 = \varepsilon$.
Karena $\lim_{n\to\infty} n log \frac{a_n}{a_{n+1}} = L$, maka ada bilangan asli m sehingga untuk setiap n≥ m
Maka $\left|n log \frac{a_n}{a_{n+1}} - L\right| < \varepsilon$. akibatnya $n log \frac{a_n}{a_{n+1}} < L + \varepsilon = 1$ maka $log \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1/n$.
Selanjutnya $\frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{1/n} < \frac{1}{1-1/n} = \frac{n}{n-1}$.
(karena 1/n <1)
$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 < \frac{n}{n-1} - 1 = \frac{1}{n-1}$ dan
$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$.
Berdasarka tes Raabe, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.
(iv) Misalkan L = 1. Tidak ada kesimpulan.
Contoh : Tentukan kekonvergenan dari deret :
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dengan $a_n = \frac{(1+n)^n}{n!} x^n$, x > 0.
Jawab Pandang $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+n)^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(2+n)^{n+1}} \frac{1}{x^{n+1}}$
$= \frac{(1+n)^{n+1}}{(2+n)^{n+1}} \frac{1}{x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}} \frac{1}{x}$ Maka
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}} \frac{1}{x} = \frac{1}{ex}$.
Berdasarkan tes rasio: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika $\frac{1}{ex} > 1$ atau x <1/e,

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

dan$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen jika $\frac{1}{ex} < 1$ atau x >1/e.Jika x =1/e, maka

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}\frac{1}{x} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}$$

$$n\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = n[\log e - \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}]$$

= n[1- (n+1)log $(1+\frac{1}{n+1})$] = n [1- (n+1) $\{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} - \cdots\}$]

=n[1-1+$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{3(n+1)^2} + \ldots$]

=$\frac{n}{2(n+1)} - \frac{n}{3(n+1)^2} + \ldots$

Maka $\lim_{n\to\infty} n\log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$.

Jadi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

4. Tes akar ke-n Cauchy.

Misalkan $a_n > 0$ $\forall n \in N$ dan $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$ =L, maka:

1. Jika L∈ R: (i) Jika L < 1 maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, dan
   (ii) Jika L > 1 maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen
   (iii) Jika L = 1, maka tidak memberi kesimpulan.
2. Jika L = ∞ maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen

Bukti:

(i). Jika L < 1, pilih $\varepsilon > 0$, dengan ε<1-L maka L+ε< 1, misalkan R = L + ε< 1.

Karena $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$ =L maka ada bilangan bulat positif m sehingga $\forall n > m$

$\left|a_n{}^{1/n} - L\right| < \varepsilon \leftrightarrow L - \varepsilon <$ $(a_n)^{1/n}$ <L + ε = R

Pandang, $(a_n)^{1/n} < R \to a_n < R^n$ dan R < 1

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} R^n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} R^n$ konvergen maka berdasarkan teorema perbandingan disimpulkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen.

(ii). Jika L > 1, pilih ε>0 sehingga L – 1 >ε> 0 .Misalkan r = L – ε>1. Karena $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n}$ maka ada k ∈ Z sehingga $\forall n > k$ maka :$\left|a_n{}^{1/n} - L\right| < \varepsilon \to L - \varepsilon < (a_n)^{1/n} <$ L+ε. Sehingga $r < a_n{}^{1/n}$ maka $r^n < a_n$. Karena r>1 maka $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ divergen, akibatnya $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

(iii) Jika L=1 , maka $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = 1$.
Pandang kasus berikut:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ maka $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ maka $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = 1$

Bukti: Misal $y = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$, maka

$$\ln y = \ln\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n},$$

Pandang: $\lim_{n\to\infty}\ln y = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$. sehingga $\ln\lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty}\ln y = 0$Maka

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} y = e^0 = 1$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = 1$$

Dari (a) dan (b) dpat disimpukan bahwa jika L=1 , maka tidak ada kesimpulan konvergensi.

(iv) Kasus L = ∞. $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \infty$.
artinya $\exists\alpha > 1, \exists k \in N \ni \forall n \geq k \to$ $(a_n)^{1/n}$>2→ $a_n > 2^n$

Berdasarkan teorema perbandingan :
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen

Contoh : Tentukanlah kekonvergenan dari deret :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

Jawab: Pandang, $a_n{}^{1/n} = \left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}$

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Jadi, $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 < 1$

Berdasarkan teorema .... maka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ konvergen. Karena $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen

5. Tes Condensasi Cauchy's (Cauchy's Condensation Test)

Jika (a_n) barisan bilangan real positif yang tidak naik, maka deret:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ sama-sama konvergen atau sama-sama divergen

Bukti :

(i). Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergen, akan ditunjukkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergen maka jumlah m barisan $\sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n}$ terbatas di atas, artinya: $\exists k > 0\ dan m \geq 0 \ni \sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} < k$

Karena (a_n) barisan tidak naik, maka kita mempunyai:

$a_1 \leq a_1, a_2 + a_3 \leq a_2 + a_2 = 2a_2$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4,$ dan seterusnya.

Maka diperoleh: $\sum_{n=1}^{2.2^m} a_n \leq \sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n}$.

Dan $S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n \leq \sum_{n=1}^{2.2^m} a_n \leq \sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} <$ k.

Berdasarkan teorema 5 Karena jumlah parsial S_m dari deret terbatas maka $\sum_{n=1}^{m} a_n$ konvergen.

(ii) Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ divergen, akan ditunjukkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ divergen, maka berdasarka terema 5 maka m jumlah parsial $\sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n}$ tidak terbatas diatas.

Artinya $diberikan \beta > 0\ \exists m \in Z^+ \ni \sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} > 2\beta$.+

Karena (a_n) barisan bilangan real positif yang tidak naik maka :

$$a_3 + a_4 \geq a_4 + a_4 = 2a_4$$

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq a_8 + a_8 + a_8 + a_8 = 4a_8$, dan seterusnya.

Secara umum: $\forall n \geq 1, a_{2^n+1} + a_{2^n+2} + \ldots + a_{2^{n+1}} \geq 2^n a_{2^{n+1}}$

Pilih : n > 2^{m+1} , sehingga:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\geq a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{m+1}}$$
$$\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^m a_{2^{m+1}}$$
$$\geq \frac{1}{2}[2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^{m+1} a_{2^{m+1}}]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m+1} 2^k a_{2k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} 2^k a_{2k} > \beta$$

Diperoleh jumlah S_m parsial dari $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tidak terbatas maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen.

Contoh: Tunjukkan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,

(i) Divergen jika p≤0
(ii) Konvergen jika p>1
(iii) Divergen jika p≤1

Jawab: Menggunakan tes Condensasi Cauchy's

(i) Jika p<0 maka $1/n^p = n^{-p} > 1$, $\forall n \geq 1$, maka $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} \neq 0$. Maka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ divergen

(ii) Misalkan p>0. Barisan $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ merupakan barisan tidak naik. Misalkan $a_n = \frac{1}{n^p}$, $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = (2^{1-p})^n$.

Maka $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ merupakan deret geometri dengan rasio r=$(2^{1-p})^n$

Sehingga deret akan konvergen jika r=$(2^{1-p})^n < 1$ yaitu jika p>1.

Akan divergen jika r=$(2^{1-p})^n > 1$ yaitu jika p≤1, (terbukti).

Contoh : Diberikan deret $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^p}$.

Buktikan deret divergen $\forall p \in R$

Bukti : Berdasarkan teorema 1 jika p<0 maka $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^p}$ divergen.

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Misalkan $a_n = \frac{1}{(\log n)^p}$. Untuk n≥1,

Misalkan $2^n a_{2^n} = 2^n \left(\frac{1}{(\log 2^n)^p}\right) = \frac{2^n}{n^p(\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p}\frac{2^n}{n^p}$

Misalkan $b_n = \frac{2^n}{n^p}$, maka $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{2^n}{n^p}\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^p$.

Maka, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$. Berdasarkan tes rasio, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergen.

Berdasarkan tes kondensasi maka $\sum_{n\to}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ divergen mengakibatkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^p}\, divergen.$

Contoh: Misalkan $a_n > 0, \forall n \in N$dan

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^k + An^{k-1} + Bn^{k-2} + \ \ldots}{n^k + an^{k-1} + bn^{k-2} + \ \ldots}$$

Dimana k adalah bilangan bulat positif dan $k \geq 2$.

Tentukan syarat kekonvergena deret tersebut:

Jawab :

Karena $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ =1, maka berdasarkan tes rasio D'Alembert maka tidak ada kesimpulan.

Pandang, $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{(A-a)n^{k-1}+(B-b)n^{k-2}+\ \ldots}{n^k+an^{k-1}+bn^{k-2}+\ \ \ldots}\right]$

Maka $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = A - a$

Menggunakan tes Raabe's: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika $A > a + 1$ dan divergen jika A<a+1.

6. Tes Konvergensi Deret Fungsi

Kriteria Cauchy:

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi pada D subhimpunan dari himpunan Real konvergen ke f. Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)$adalah konvergen seragam pada D jika dan hanya jika untuk setiap ε> 0, ada M(ε) sehingga jika m> n > M(ε) , maka

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \ \ldots + f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in D$$

Tes Weiestrass

Misalkan (M_n) adalah barisan bilangan real positif sehingga $|f_n(x)| \leq M_{n,} \forall x \in D n \in N$.

Jika $\sum_{n=1}^{\infty}(M_n)$ konvergen maka $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)$konvergen seragam di D.

Bukti :

Misalkan m > n, dan $|f_n(x)| \leq M_{n,} \forall x \in D$,

maka kita mempunyai: $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ \ldots + f_m(x)| < M_{n+1,} + M_{n+2,} + \ldots + M_{m,}$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty}(M_n)$ konvergen maka barisan (M_n) terbatas , akibatnya barisan subbarisan dari (f_n) juga terbatas. Sehingga barisan $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)$ konvergen.

Tes Integral

Misalkan f fungsi turun dan positif pada himpunan { t : t ≥1}. Maka deret $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)$ konvergen jika dan hanya jika integral tak wajar :

$\int_1^{\infty} f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\{\int_1^n f(t)dt\}$ ada.

Dalam kasus fungsi konvergen, misalkan jmlah parsial $S_n = \sum_{k=1}^{n}(f_k)$ dan jumlah jumlah seluruhnya s = $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k)$ maka

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leq S - S_n \leq \int_n^{\infty} f(t)dt.$$

Bukti:

Karena f positif dan turun pada interval [k, k-1] maka ;

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)$$

begitu juga $f(k-1) \leq \int_k^{k-1} f(t)dt \leq f(k-2)$ dan seterusnya.Untuk k = 2, 3, 4, . . .,n. dan menjumlahkan masing-masing pertidaksamaan maka diperoleh :

$S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq S_{n-1}$.

Dengan mengambil limit dari pertidaksanaan diatas maka diperoleh kesimpulan : Jika $\lim_{n\to\infty} S_n$ ada maka $\lim_{n\to\infty}[\int_1^n f(t)dt]$ ada dan

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

jika $\lim_{n\to\infty} S_n$ tidak ada maka $\lim_{n\to\infty}[\int_1^n f(t)dt]$ juga tidak ada.

Misalkan limitnya ada, maka untuk k = n+1, ...,m dan menjumlahkan masing-masing pertidaksamaan, maka diperoleh :

$$S_m - S_n \leq \int_{n+1}^{m} f(t)dt \leq S_{m-1} - S_n$$

Dari kedua pertidaksamaan diperoleh bahwa $\int_{n+1}^{m+1} f(t)dt \leq S_m - S_n \leq \int_{n+1}^{m} f(t)dt$. Dengan mengambil $m \to \infty$ maka diperoleh:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leq S - S_n \leq \int_{n}^{\infty} f(t)dt.$$

Contoh: Tentukan kekonvergenan deret: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.Karena f(t) =$\frac{1}{t^p}$ adalah fungsi positif dan turun maka gunakan tes integral.Untuk p= 1 maka $\int_1^n \frac{1}{t}$dt = log(n) – log1.Maka $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{t} dt = \sim$

Untuk p ≠1 , maka $\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{t^p} dt = \lim_{n\to\infty}[n^{-p+1} - (1^{-p+1})] = \frac{1}{1-p}[n^{-p+1} - 1]$

Maka deret konvergen jika p<1 dan divergen jika p>0

SIMPULAN. DAN SARAN

Karakteristik dari masing – masing tes konvergensi adalah: Tes Rasio D'Alembert lebih sering dipakai karena lebih mudah penggunaannya. Karakteristiknya: mudah dipakai pada deret yang sukunya memuat bentuk: n! , r^n , dan n^n . Maka lebih mudah menentukan nilai $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.: Tes Raabe; biasanya dipakai jika pada tes rasio diperoleh nilai limit perbandingannya adalah 1sehingga tes tersebut tidak memberikan kesimpulan.. Jadi tes ini merupakan pengembangan dari tes rasio. Tes Logaritma, tes ini digunakan pada deret tak hingga yang memuat bentuk logaritma. Keutamaan bentuk logaritma pada deret ini adalah kita dapat lebih menyederhanakan bentuk aljabar, seperti bentuk pangkat dapat dirubah menjadi bentuk perkalian sedangkan perkalian diubah menjadi penjumlahan dan bentuk pembagian dapat dirubah menjadi bentuk pengurangan.

Tes akar ke-n Cauchy, dapat digunakan menentukan kekonvergenan deret tak hingga yang memuat bentuk pangkat ke-n. Dengan tes kekonvergenan ini maka bentuk pangkat dapat disederhanakan menjadi bentuk lebih sederhana tanpa pangkat. Akibatnya akan mudah menentukan nilai limit akar ke-n. Tes kondensasi Cauchy, dipakai untuk menyederhanakan deret dengan bentuk lebih rumit menjadi deret yang lebih sederhana yang memuat bentuk 2^n sehingga berikutnya dapat digunakan tes Rasio, dan bisa dihitung limitnya dengan cepat. Tes barisan Fungsi: tes digunakan memeriksa kekonvergenan deret dari fungsi pada bilangan real.

A. Saran

Untuk menentukan kekonvergenan deret tak hingga maka perlu dipakai tes konvergensi yang tepat sehingga dapat lebih cepat diketahui kekonvergenannya. Untuk dapat memilih tes konvergensi yang tepat disarankan untuk mengetahui terlebih dahulu karakteristik dari masing-masing tes konvergensi tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Bartle,Robert G dan Sherbert Donald R (1994), Introduction To Real Analysis, United States of america, Jhon Wiley & Sons.

Purcell, Edwin J, Varberg Dale, Rigdon, (2004), Kalkulus, Jakarta, Erlangga

Stroud, K.A, (2003), Matematika Teknik, Jakarta, Erlangga

Wasan, Siri Krishan, Prakash Ravi, (1976), Real Analysis, New Delhi, Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited