EKSAKTA Vol. 19 No. 1
30 April 2018
http://eksakta.ppj.unp.ac.id
E-ISSN : 2549-7464
P-ISSN : 1411-3724

BEBERAPA SYARAT CUKUP UNTUK BILANGAN KROMATIK LOKASI HINGGA PADA GRAF TAK TERHUBUNG

Des Welyyanti

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Andalas
email : deswelyyanti@gmail.com
DOI : 10.24036/eksakta/vol19-iss01/130

ABSTRACT

The locating-chromatic number of a graph is introduced by Chartrand et al. in 2002. Firstly, Chatrand et al. determine the locating-chromatic number of path and double stars. The locating-chromatic number is an interesting concept ini graph theory. In this paper, we determine some condtions for disconnected graphs has a finite locating-chromatic number.

Keywords: Bilangan Kromatik-Lokasi, Graf Tak Terhubung, Kode Warna.

PENDAHULUAN

Bilangan kromatik-lokasi suatu graf adalah salah satu konsep dalam teori graf yang sedang berkembang akhir-akhir ini. Konsep tersebut merupakan kasus khusus dari dimensi partisi dan pewarnaan suatu graf. Konsep pewarnan graf melahirkan konsep bilangan kromatik. Konsep bilangan kromatik sangat menarik untuk dikaji dan mempunyai aplikasi yang menarik dalam berbagai masalah.

Bilangan kromatik, dinotasikan $\chi(G)$, adalah bilangan bulat terkecil *k* sehingga graf *G* sehingga graf *G* mempunyai pewarnaan titik sejati dengan *k* warna. Sedangkan, *pewarnaan titik sejati* dari graf *G=(V,E)* dengan *k* warna adalah suatu pemetaan $c: V(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap *u* dan *v* yang bertetangga di *G*.

Penerapan bilangan kromatik untuk suatu graf sangat beragam. Diantaranya adalah masalah pengaturan jadwal, masalah penempatan bahan kimia dan penempatan barang dari beberapa objek yang berbeda. Hal tersebut dikemukan oleh G. Chartrand dan O.R Oellerman [12] pada tahun 1993.

Bilangan kromatik-lokasi diperoleh dari penurunan bilangan kromatik. Namun demikian, karakteristik bilangan kromatik-lokasi sangat berbeda dengan bilangan kromatik itu sendiri. Sebagai contoh, bilangan kromatik lokasi graf pohon sebarang adalah *2*. Namun bilangan kromatik-lokasi graf pohon sangat bervariasi. Dengan demikian, penentuan bilangan kromatik-lokasi sangat menarik untuk dikaji.

Konsep bilangan kromatik-lokasi merupakan perpaduan antara pewarnaan dan dimensi partisi untuk suatu graf. Konsep dimensi partisi untuk suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [11] pada tahun 1998. Adapun definisi dimensi partisi yang dikemukakan Chartrand dkk. adalah sebagai berikut: Misalkan *G=(V,E)* suatu graf, $v \in V(G)$ dan $S \subset V(G)$. *Jarak* dari titik *u* ke *v* pada graf *G*, dinotasikan *d(u,v)*, adalah panjang lintasan terpendek dari titik *u* ke *v*. *Jarak* dari *v* ke himpunan *S*, dinotasikan dengan *d(v,S)*, adalah $\min\{d(v,x\}, x \in S\}$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ adalah partisi dari *V(G)*. *Representasi v* terhadap Π, dinotasikan dengan $r(v|\Pi)$, adalah *k*-pasang terurut $(d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_k))$. Selanjutnya Π disebut *partisi pembeda* dari V(G) jika $r((u|\Pi) \neq r((v|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. *Dimensi partisi* dari *G*, dinotasikan dengan *pd(G)*, adalah nilai *k* terkecil sehingga *G* mempunyai partisi pembeda dengan *k* kelas partisi.

Chartrand dkk. memperkenalkan konsep bilangan kromatik-lokasi untuk pertama kali pada tahun 2002 [9]. Chartrand dkk. [9] mendefinisikan bilangan kromatik- lokasi sebagai berikut. Misalkan *c* suatu pewarnaan titik sejati pada graf *G* dengan k warna. Misalkan $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah *partisi* dari himpunan titik *V(G)* yang induksi oleh pewarnaan *c*. *Kode warna* $c_\pi(v)$ dari titik *v* adalah *k*-pasang terurut $(d(v,C_1), d(v,C_2), \ldots, d(v,C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v,x) \mid x \text{ di } C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika semua titik di *G* mempunyai kode warna yang berbeda, maka *c* disebut *pewarnaan-lokasi* dari graf *G*. Nilai terkecil k sedemikian sehingga *G* mempunyai pewarnaan-lokasi dengan *k* warna disebut sebagai *bilangan kromatik-lokasi* dari *G*, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan sejati pada *G*, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$. Graf yang mempunyai bilangan kromatik-lokasi yang kurang dari *3* adalah graf lengkap dengan 1 titik dan 2 titik, dinotasikan K_1 dan K_2, yaitu $\chi_L(K_1) = 1$ dan $\chi_L(K_2) = 2$. Selanjutnya, Chartrand dkk. (2002) memperoleh bilangan kromatik-lokasi untuk graf lintasan, graf lingkaran dan bintang ganda [8]. Adapun hasil yang diperoleh antara lain: (i) $\chi_L(P_n) = 3$ untuk $n \geq 3$; (ii) $\chi_L(C_n) = 4$ atau *3* bila *n* ganjil atau *n* genap; (iii) $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$ bila $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$. Selain itu, mereka menunjukkan bahwa graf multipartit lengkap adalah satu-satunya graf orde n yang mempunyai bilangan-kromatik lokasi *n*, untuk $n \geq 3$.

Selanjutnya, Chartrand dkk. [10] juga telah memperoleh semua graf berode n yang mempunyai bilangan kromatik-lokasi *(n-1)*, dan memperoleh semua graf yang mempunyai bilangan kromatik-lokasi dengan batas atasnya *(n-2)*. Lebih lanjut, Chartrand dkk [9] juga dapat membuktikan bahwa senantiasa terdapat pohon berorde *n* ≥ 5, dengan bilangan kromatik-lokasi *k* jika dan hanya jika $k \in \{3, 4, \ldots, n-2, n\}$. Artinya bahwa tidak terdapat graf pohon dengan orde $n \geq 5$ dan mempunyai bilangan kromatik-lokasi n-1.

Penelitian pada bilangan kromatik-lokasi masih terbatas pada kelas-kelas graf tertentu, Adapun hasil-hasil yang telah diperoleh adalah sebagai berikut: bilangan kromatik-lokasi untuk graf amalgamasi bintang [3] dan kembang api [2] ditentukan oleh Asmiati dkk. Pada tahun 2013, Des Welyyanti dkk. telah menentukan bilangan kromatik-lokasi untuk graf *n-ary* lengkap [5]. Selain itu pada tahun yang sama, D.K Syofyan dkk. juga dapat menentukan bilangan kromatik-lokasi untuk graf lobster seragam [4].

Selanjutnya, penelitian bilangan kromatik-lokasi yang telah diperoleh adalah bilangan kromatik-lokasi untuk suatu graf yang diperoleh dari beberapa operasi graf, yaitu operasi korona [8], halin [13], *product* [14]dan subdivisi [15]. Selain itu, penelitian bilangan kromatik-lokasi juga dilakukan dengan mengkarakterisasi suatu graf dengan bilangan kromatik-lokasi tertentu. Diantaranya adalah mengkarakterisasi graf yang memuat *cycle* dengan bilangan kromatik-lokasi *3* [1] dan mengkarakterisasi graf pohon dengan bilangan kromatik-lokasi *3* [7].

Hingga saat ini, penelitian bilangan kromatik-lokasi masih terbatas pada kelas graf tak terhubung. Dengan demikian, pada makalah ini akan dibahas beberapa syarat kapan bilangan kromatik-lokasi masih bernilai hingga.

HASIL – HASIL UTAMA

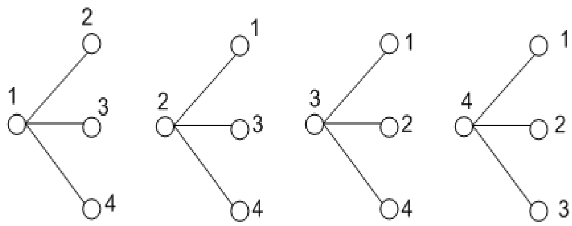
Misalkan $H = \cup_{i=1}^{m} G_i$ adalah graf tak terhubung, dengan G_i adalah komponen-komponen dari H. Adapun definisi komponen sebagai berikut: subgraf G_i, untuk $1 \leq i \leq m$, adalalah komponen dari H jika G_i subgraf terhubung maksimal dari H.

Untuk menentukan bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung, maka perlu diperumum konsep bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung. Adapun definisi bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1. *Misalkan c adalah pewarnaan-k sejati pada H yang menginduksi partisi* $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ *dari V(H). Kode warna dari titik* $v \in V(H)$ *adalah* $(d(v,C_1), d(v,C_2), \ldots, d(v,C_k))$ *dengan* $d(v, C_i) = \min\{d(v,x) \mid x \text{ di } C_i\}$ *dan* $d(v|C_i) \leq \infty$ *untuk* $1 \leq i \leq k$ *. Pewarnaan c dikatakan pewarnaan lokasi-k bila semua kode warna dari semua titik di H berbeda. Bilangan kromatik-lokasi dari graf H,* $\chi_L'(H)$*, adalah bilangan terkecil k sedemikian sehingga H mempunyai pewarnaan-k lokasi. Dalam hal tidak ada nilai k yang memenuhi maka* $\chi_L'(H) = \infty$.

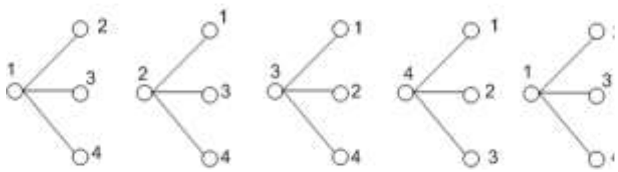
Bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung dapat bernilai hingga atau tak hingga. Adapun contoh dari bilangan kromatik lokasi yang benilai hingga dan tak hingga dapat dilihat pada contoh dibawah ini.

http://www.eksakta.ppj.unp.ac.id
DOI : 10.24036/eksakta/vol19-iss01/130
EKSAKTA Vol. 19 No. 1/30 April 2018
E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

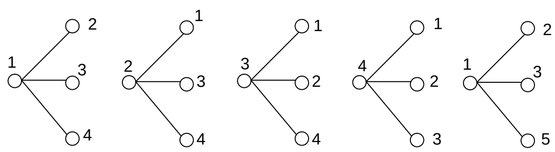


Gambar 1: Graf tak Terhubung dengan Bilangan Kromatik-Lokasi Hingga

Gambar 1 merupakan graf tak terhubung, $H = \cup_{i=1}^{4} K_{1,n_i}$, dengan komponen-komponennya adalah graf bintang dengan *4* titik, $K_{1,3}$, sedemikian hingga graf *H* mempunyai pewarnaan-4 lokasi. Akibatnya, $\chi_L'(H) = 4$ artinya bilangan kromatik-lokasi *H* hingga.



Gambar 2: Graf tak Terhubung dengan Bilangan Kromatik-Lokasi tak Hingga



Gambar 3: Pewarnaan Titik yang bukan Pewarnaan-Lokasi pada Graf Terhubung

Gambar 2 merupakan graf tak terhubung, $H = \cup_{i=1}^{5} K_{1,n_i}$, dengan komponen-komponennya adalah graf bintang dengan *4* titik, $K_{1,3}$. Jika graf *H* mempunyai pewarnaan-4 lokasi, maka terdapat 2 titik, $u, v \in V(H)$ yang mempunyai kode warna yang sama atau $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$. Akibatnya, akan muncul warna ke *5*, lihat Gambar 3. Tetapi, hal ini tidak mungkin karena akan terdapat $v \in V(H)$ dengan $d(v, C_5) = \infty$. Jadi, $\chi_L'(H) = \infty$ artinya bilangan kromatik-lokasi *H* tak hingga.

Pada [6] telah batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung, seperti pada teorema di bawah ini:

Teorema 2.2. *Misalkan* $H = \cup_{i=1}^{m} G_i$ *adalah graf tak terhubung. Jika* $\chi_L'(H) < \infty$, *maka* $q \leq \chi_L'(H) \leq r$ *dengan* $q = maks\{\chi_L(G_i) | i \in [1,m]\}$ *dan* $r = min\{|G_i| | i \in [1,m]\}$.

Titik $v \in V(G)$ disebut titik *dominan* jika $d(v, C_i) = 1$ untuk $v \notin C_i$ dan *0* untuk yang lainnya. Teorema dibawah ini akan menunjukkan bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung *H*, dimana setiap pewarnaan-lokasi dari G_i yang merupakan komponen dari *H*, mempunyai satu titik dominan.

Teorema 2.3. *Misalkan G adalah graf terhubung dengan bilangan kromatik-lokasi,* $\chi_L'(G) = k$, *dan* $H = (k+1)G$. *Jika setiap pewarnaan-lokasi pada G memuat satu titik dominan, maka* $\chi_L'(H) = \infty$.

BUKTI. Misalkan *G* adalah komponen dari *H*. Dengan kontradiksi, asumsikan bahwa $\chi_L'(H)$ hingga. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\chi_L'(H) > k+1$ atau $\chi_L'(H) < k+1$, maka terdapat $u \in V(G)$ dengan $c(u) \in \{1,2,\dots,k\}$ sedemikian hingga $d(u, C_{k+1}) = \infty$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = (1,1,\dots,1,0,1,\dots,1,\infty)$ yang artinya terdapat *G* yang tidak memuat titik dominan pada pewarnaan-lokasinya. Misalkan $\chi_L'(H) < k+1$, maka terdapat

$v \in V(H)$ dengan $c(v) \in \{1,2,\ldots,k\}$ sedemikian hingga $d(v, C_{k+1}) = \infty$. Akibatnya, $c_{\Pi}(v) = (1,1,\ldots,1,0,1,\ldots,\infty,1)$ yang artinya terdapat G yang tidak memuat titik dominan pada pewarnaan-lokasinya. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa setiap pewarnaan-lokasi pada G memuat satu titik dominan, jadi haruslah $\chi_L'(H) = \infty$. □

Teorema dibawah ini akan ditentukan syarat kapan bilangan kromatik-lokasi masih bernilai hingga. Pada teorema 2.4, jika graf tak terhubung H mempunyai 2 komponen dengan bilangan kromatik untuk setiap komponen tersebut adalah ordenya, maka bilangan kromatik dari graf tak terhubung H adalah tak hingga. Adapun teoremanya adalah sebagai berikut:

Terorema 2.4. *Misalkan $H = \cup_{i=1}^{m} G_i$ adalah graf tak terhubung. Jika $\chi_L'(H) < \infty$, maka H tidak memuat G_i dan G_j*, untuk suatu $1 \le i,j \le m$ dan $i \ne j$, *dengan $\chi_L(G_i) = |G_i|$ dan $\chi_L(G_j) = |G_j|$ dimana $|G_i| \ne |G_j|$.*

BUKTI. Dengan kontradisi, asumsikan G_i dan G_j adalah komponen sebarang dari H, untuk suatu $1 \le i,j \le m$ dan $i \ne j$ dengan $\chi_L(G_i) = |G_i| = m$ dan $\chi_L(G_j) = |G_j| = n$ dimana $|G_i| \ne |G_j|$. Karena $|G_i| \ne |G_j|$, maka diperoleh $|G_i| < |G_j|$ atau $|G_i| > |G_j|$. Untuk $|G_i| < |G_j|$, akan diperoleh $m < n$. Jika $m < n$, maka $d(u, C_n) = \infty$ untuk setiap titik $u \in V(K_m)$. Akibatnya $\chi_L'(H) = \infty$. Untuk $|G_i| > |G_j|$, akan diperoleh $m > n$. Jika $m > n$, maka $d(v, C_m) = \infty$ untuk setiap titik $v \in V(K_n)$. Akibatnya $\chi_L'(H) = \infty$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\chi_L'(H) < \infty$, jadi haruslah H tidak memuat G_i dan G_j, untuk suatu $1 \le i,j \le m$ dan $i \ne j$, dengan $\chi_L(G_i) = |G_i|$ dan $\chi_L(G_j) = |G_j|$ dimana $|G_i| \ne |G_j|$. □

Syarat lain untuk bilangan kromatik lokasi yang bernilai hingga adalah bila graf tak terhubung H memuat graf lengkap, K_n, sebagai salah satu komponen H maka orde setiap komponen di H selain graf lengkap, K_n, haruslah lebih besar dari n. Seperti tertuang pada teorema dibawah ini.

Teorema 2.5. *Misalkan $H = \cup_{i=1}^{m} G_i$ adalah graf tak terhubung. Jika $\chi_L'(H) < \infty$ dan H memuat $K_n = G_j$ untuk suatu $j \in [1,m]$, maka $|G_i| > n$.*

BUKTI. Misalkan H memuat $K_n = G_j$ dan G_i adalah suatu komponen di H untuk $i,j \in [1,m]$ dan $i \ne j$. Dengan kontradiksi, asumsikan $|G_i| \le n$ maka diperoleh $\chi_L'(G_i) \le n$. Akibatnya, $d(v, C_n) = \infty$ untuk setiap $v \in G_i$ dimana $i \in [1,m]$. Jadi $\chi_L'(G_i) = \infty$. Hal ini kontradiksi dengan penyataan $\chi_L'(H) < \infty$. Jadi haruslah $|G_i| > n$. □

KESIMPULAN

Bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung dapat bernilai hingga dan tak hingga. Adapun batas bawah dari bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung adalah nilai maksimum dari bilangan kromatik-lokasi setiap komponennya. Sedangkan, batas atas dari bilangan kromatik-lokasi untuk graf tak terhubung adalah nilai minimum dari orde setiap komponennya.

Beberapa syarat cukup untuk graf tak terhubung yang masih bernilai hingga adalah sebagai berikut:

1. Misalkan G adalah graf terhubung dengan bilangan kromatik-lokasi, $\chi_L'(G) = k$, $H = nG$, dan setiap pewarnaan-lokasi pada G memuat satu titik dominan. Jika $\chi_L'(H) < \infty$, maka haruslah $n \leq k+1$.
2. Misalkan $H = \cup_{i=1}^{m} G_i$ adalah graf tak terhubung. Jika $\chi_L'(H) < \infty$, maka H tidak memuat G_i dan G_j, untuk suatu $1 \leq i,j \leq m$ dan $i \neq j$, dengan $\chi_L(G_i) = |G_i|$ dan $\chi_L(G_j) = |G_j|$ dimana $|G_i| \neq |G_j|$.
3. Misalkan $H = \cup_{i=1}^{m} G_i$ adalah graf tak terhubung. Jika $\chi_L'(H) < \infty$ dan H memuat $K_n = G_j$ untuk suatu $j \in [1,m]$, maka $|G_i| > n$.

REFERENSI

Asmiati dan E.T. Baskoro, Characterizing all graphs containing cycles with locating-chromatic number 3 . AIP Conf. Proc. 1450 (2012), 351-357.

Asmiati, E.T. Baskoro, H. Assiyatun, D. Suprijanto, R. Simanjuntak dan S. Uttunggadewa, Locating-chromatic Number of Firecracker Graphs, Far East J. Math. Sci.63:1 (2012), 11-13.

Asmiati, H. Assiyatun dan E.T Baskoro, Locating-chromatic of amalgamation of strars, ITB J.Sci. 43A:1 (2011), 1-8.

D.K. Syofyan, E.T. Baskoro dan H. Assiyatun, On the locating-chromatic number of homogeneous lobster, AKCE Int. J. Graph Comb. 10:3 (2013),245-252.

D. Welyyanti, E.T. Baskoro, R. Simanjuntak dan S. Uttunggadewa, On locating-chromatic number of complete n -ary Tree, AKCE Int. J. Graph Comb. 10:3 (2013),309-315.

D. Welyyanti, E.T. Baskoro, R. Simanjuntak dan S. Uttunggadewa, The Locating-Chromatic Number of Disconnected Graphs, Far East J. Math. Sci., 94:2(2014), 169-182.

E.T Baskoro dan Asmiati, Characterizing all trees with locating-chromatic number 3, Electronic Journal of Graph Theory and Applications 1, 2(2013), 109-117.

E.T. Baskoro dan I.A. Purwasih, The locating-chromatic number of corona product of graph. Southeast Asian Journal of Sciences 1:1 (2011), 126-136.

G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater dan P. Zhang, The locating-chromatic number of a graph, Bull. Inst. Combin. Appl. 36 (2002), 89-101.

G. Chartrand, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater dan P. Zhang, Graph of order n with locating-chromatic number n -1 , Discrete Math. 269 (2003) 65-79.

G. Chartrand, E. Salehi, P. Zhang, On the partition dimension of graph, Congr. Numer. 130 (1998), 157-168.

G. Chartrand dan O.R. Oellermann, Applied and algorithmic graph theory, McGraw-Hill, Inc., New York, 1993.

DOI : 10.24036/eksakta/vol19-iss01/130
EKSAKTA Vol. 19 No. 1/30 April 2018
E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

I. A. Purwasih dan E. T. Baskoro, The Locating-Chromatic Number of Certain Halin Graphs, AIP Conf. Proc. 1450, (2012), 342-345.

I. A. Purwasih, M. Baca, dan E. T. Baskoro, The locating chromatic number of strong product of two paths, Proceeding ICMSA, ISBN: 978-979-96152-7-5.

I. A. Purwasih, E. T. Baskoro, H. Assiyatun dan W. Djohan, The locating-chromatic number for a subdivision of a wheel on one cycle edge, AKCE Int. J. Graphs Comb., 10, No. 3 (2013), 327-33