EKSAKTA Vol. 19 No. 1
30 April 2018
http://eksakta.ppj.unp.ac.id
E-ISSN : 2549-7464
P-ISSN : 1411-3724

SUB RUANG TUTUP TOPOLOGI HASIL KALI RUANG METRIK KERUCUT

Badrulfalah, Iin Irianingsih

Departemen Matematika, FMIPA Universitas Padjajaran, Bandung
e-mail : badrulfalah@gmail.com, iin_mtk@yahoo.com
DOI : 10.24036/eksakta/vol19-iss01/128

ABSTRACT

Sebuah sifat topologi selain dapat dimiliki oleh suatu ruang topologi juga dapat dimiliki oleh subruang dari ruang topologi tersebut. Pada makalah ini akan dibahas tentang aksioma keterhitungan pertama pada topologi hasil kali ruang metrik kerucut, khususnya pada subruang tutup. Pembahasan dilakukan dengan menunjukkan bahwa setiap elemen dari setiap subruang tutup dari topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut memiliki basis lokal terhitung. Hasilnya adalah setiap subruang tutup dari topologi hasil kali ruang metrik kerucut juga memenuhi aksioma keterhitungan pertama. Dengan kata lain keterhitungan pertama bersifat hereditas lemah.

Keywords : *Aksioma keterhitungan pertama, subruang tutup,basis lokal, hereditas lemah*

PENDAHULUAN

Ruang metrik kerucut merupakan perluasan dari ruang metrik biasa, didefinisikan oleh Huang & Zhang pada [3]. Setiap metrik menginduksi sebuah topologi metrik, begitupun dengan metrik kerucut. Topologi yang diinduksi oleh metrik kerucut disebut topologi metrik kerucut. Topologi memiliki banyak aspek kajian, di antaranya adalah sifat topologi, hereditas dan hereditas lemah. Ada banyak sifat topologi, salah satunya adalah aksioma keterhitungan pertama. Turkoglu & Abuloha pada [7] telah membuktikan bahwa setiap ruang metrik kerucut adalah ruang hitung pertama. Menggunakan hasil pada [2] Badrulfalah, Khafsah J, dan Iin Irianingsih pada [1] telah melakukan penelitian permulaan tentang aksioma keterhitungan pertama pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut. Hasilnya adalah aksioma keterhitungan pertama selain berlaku pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut juga berlaku pada setiap subruangnya. Dengan perkataan lain bahwa aksioma keterhitungan pertama pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut bersifat hereditas.

Mengingat tidak setiap sifat yg dimiliki oleh suatu ruang topologi juga dapat dimiliki oleh subruang tutupnya, sebagai kelanjutan dari penelitian yang diperoleh pada [1] maka pada penelitian ini dibahas keberlakuan aksioma keterhitungan pertama pada subruang tutup dari ruang topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut. Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan bahwa aksioma keterhitungan pertama pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut merupakan hereditas lemah.

METODE PENELITIAN

Untuk membuktikan keterhitungan pertama pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut merupakan sifat hereditas lemah dilakukan dengan menunjukkan bahwa setiap subruang tutup dari ruang tersebut juga terhitung pertama yaitu setiap elemen dari setiap subruang tutupnya memiliki basis lokal terhitung.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Beberapa Teori Dasar

Beberapa definisi dan lemma terkait diberikan sebagai berikut.

Pada Definisi 1.1 diberikan definisi ruang metrik.

Definisi 1.1: Misal $X \neq \emptyset$ dan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi:

(d_1). $0 \leq d(x,y), \forall x,y \in X$ dan $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(d_2). $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$

(d_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Maka $\boldsymbol{d}$ disebut metrik pada X dan (X,d) disebut Ruang metrik. [4]

Setiap metrik menginduksi topologi.

Pada Definisi 1.2 diberikan definisi subruang topologi.

Definisi 1.2 : Misal (X,τ) ruang topologi dan dan $A \neq \emptyset \subseteq X$. $\tau_A = \{G \cap A | G \in \tau\}$ disebut topologi relatif pada A dan buka (A,τ_A) disebut subruang (X,τ).[4]

Lemma 1.3 : Misal (X,τ) ruang topologi dan misal (A,τ_A) subruang dari (X,τ). A tutup di X jika dan hanya jika pemetaan inklusi $i: A \subset X$ adalah pemetaan tutup.[6]

.

Lemma 1.4 : Misal (X,d) ruang metrik dan $A \subseteq X$. G_A buka di (A,d) jika dan hanya jika terdapat G_X buka di (X,d) sedemikian sehingga $G_A = A \cap G_X$.[2]

Pada Definisi 1.5 berikut diberikan definisi basis lokal.

Definisi 1.5: Misal (X,τ) ruang topologi $p \in X$. Kelas himpunan buka $\beta_p = \{B \text{ buka} | p \in B\}$ dinamakan basis lokal pada p jika $\forall\, G$ buka dengan $p \in G$ terdapat $G_p \in \beta_p$ sedemikian sehingga $p \in G_p \subset G$.[4]

Pada Definisi 1.6 diberikan definisi hereditas.

Definisi 1.6: Misal (X,τ) ruang topologi dan misal P adalah sebuah sifat pada ruang topologi (X,τ). P dikatakan hereditas jika setiap subruang dari (X,τ) juga memiliki sifat P.[4]

Lemma 1.7: Jika A_1, A_2 terhitung maka $A_1 \times A_2$ terhitung. [4]

Pada Definisi 1.8 diberikan definisi ruang terhitung pertama.

Definisi 1.8: Misal (X,τ) ruang topologi. X disebut ruang terhitung pertama jika setiap $p \in X$ memiliki basis lokal terhitung. [4]

Lemma 1.9 : Misal (A,τ_A) subruang (X,τ) dan $p \in A$. Jika β_p basis lokal pada $p \in X$ maka ${\beta^*}_p = \beta_p \cap A$ basis lokal pada $p \in A$. [4]

Pada Definisi 1.10 diberikan definisi kerucut.

Definisi 1.10: E ruang Banach Real misal $P \subseteq E$. Himpunan P disebut kerucut jika :

i. $P \neq \emptyset$ tutup, dan $P \neq \{0\}$.

ii. Jika $a,b \geq 0$ dan Jika $x,y \in P$, maka ;$ax + by \in P$

iii. $P \cap (-P) = \{0\}$.[5]

Selanjutnya melalui perluasan metrik, diperoleh definisi ruang metrik kerucut yang didefinisikan oleh Huang dan Zhang. Definisi ruang metrik kerucut diberikan pada Definisi 1.11 berikut.

Definisi 1.11: Misal $X \neq \emptyset$ dan E ruang Banach Real yang dilengkapi dengan pengurutan parsial $\preceq$ terhadap kerucut $P \subseteq E$. Jika $d: X \times X \rightarrow E$ memenuhi:

(d_1). $0 \leq d(x,y), \forall x,y \in X$ dan $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
(d_2). $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$
(d_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. $\forall x,y,z \in X$
Maka $\boldsymbol{d}$ disebut metrik kerucut pada X dan (X,d) disebut ruang metrik kerucut. [3]

Pada Definisi 1.12 berikut diberikan definisi topologi metrik kerucut.

Definisi 1.12 : Misal (X,d) ruang metrik kerucut. Topologi τ pada X yang dibangkitkan oleh sphere buka di Xdinamakan topologi metrik kerucut atau topologi yang diinduksi oleh metrik kerucut d.

Untuk selanjutya jika disebutkan (X,d) ruang metrik kerucut maka selalu diasumsikan bahwa E dan P masing-masing sebagai ruang Banach real dan kerucut dari ruang terkait.

Dengan cara serupa pada pendefinisian himpunan buka di ruang metrik, pada Definisi 1.13 berikut diberikan definisi himpunan buka di ruang metrik kerucut.

Definisi 1.13: Misal (X_1,d_1) ruang metrik kerucut. W_1 dikatakan buka di X_1jika untuk setiap $p_1 \in W_1$terdapat $S(p_1,\delta_1)$ dengan $\delta_1 \in E_1$ sedemikian hingga $S(p_1,\delta_1) \subseteq W_1$.

Lemma 1.14: Setiap ruang metrik kerucut adalah ruang terhitung pertama.[7]

Definisi 1.15: Misal (X_1,d_1) dan (X_2,d_2) ruang metrik kerucut hasil kali X_1 dan X_2, dinotasikan $X_1 \times X_2$ adalah ruang metrik kerucut dengan metrik kerucut d, dinotasikan $(X_1 \times X_2, d)$.

Definisi 1.16: Misal $(X_1 \times X_2, d)$ ruang metrik kerucut. $W \subseteq X_1 \times X_2$ adalah buka jika untuk setiap $p = (p_1,p_2) \in W$ terdapat W_1dan W_2masing-masing buka di X_1 dan X_2 dan sphere buka $S(p_1,\delta_1)$ dan $S(p_2,\delta_2)$ dengan $\delta_1,\delta_2 \in E$ dan $p_1 \in W_1$ dan $p_2 \in W_2$ sedemikian sehingga $(p_1,p_2) \in S(p_1,\delta_1) \times S(p_2,\delta_2) \subseteq W_1 \times W_2 \subseteq W$
.

Pada Lemma 1.17 dan Lemma 1.18 diberikan sifat aksioma keterhitungan pertama masing-masing pada topologi hasil kali dan subruangnya. Keduanya merupakan hasil penelitian pada[1].

Lemma 1.17: Misal $(X_1 \times X_2, d)$ ruang metrik kerucut maka $X_1 \times X_2$ adalah ruang terhitung pertama.[1]

Lemma 1.18: Keterhitungan pertama adalah sifat hereditas pada ruang topologi kerucut $X_1 \times X_2$.[1]

2. Subruang Tutup dari Ruang Topologi Kerucut.

Pada [1] Badrulfalah, Khafsah J., dan Iin Irianingsih telah membuktikan bahwa aksioma keterhitungan pertama pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut $X_1 \times X_2$ bersifat hereditas. Dalam paper ini diberikan pembuktian keterhitungan pertama subruang tutup pada ruang topologi kerucut $X_1 \times X_2$. Untuk itu terlebih dahulu diberikan definisi hereditas lemah pada Definisi 2.1 berikut.

Definisi 2.1: Misal (X,τ) ruang topologi dan P sebuah sifat pada (X,τ). P dikatakan hereditas lemah jika setiap subruang tutup dari (X,τ) juga memiliki sifat P.[6]

Selanjutnya pada Teorema 2.2 berikut diberikan pembuktian keberlakuan aksioma keterhitungan pertama pada setiap subruang tutup dari ruang topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut $X_1 \times X_2$.

http://www.eksakta.ppj.unp.ac.id
DOI : 10.24036/eksakta/vol19-iss01/128
EKSAKTA Vol. 19 No. 1/30 April 2018
E-ISSN : 2549-7464, P-ISSN : 1411-3724

Teorema 2.2: Keterhitungan pertama adalah sifat hereditas lemah topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut $X_1 \times X_2$.

Bukti: Misal (A, τ_A) subruang tutup sebarang dari $X_1 \times X_2$. Akan ditunjukkan (A, τ_A) ruang terhitung pertama.

Ambil $p \in A$ sebarang. Karena $A \subseteq X_1 \times X_2$ maka $p \in X_1 \times X_2$. Perdefinisi maka $p = (p_1, p_2)$ untuk suatu $p_1 \in X_1$ dan $p_2 \in X_2$. Karena X_1 ruang metrik kerucut, menurut Lemma 1.14 maka X_1 ruang terhitung pertama. Berdasarkan Definisi 1.8 maka terdapat $\beta_{p_1} = \left\{ S\left(p_1, \delta_1\left(\frac{c}{n}\right)\right) \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$ basis lokal terhitung pada p_1 dengan $c \gg 0, c \in E$.

Karena X_2 ruang metrik kerucut, menurut Lemma 1.14 maka X_2 ruang terhitung pertama. Berdasarkan Definisi 1.8 maka terdapat $\beta_{p_1} = \left\{ S\left(p_2, \delta_2\left(\frac{c}{m}\right)\right) \middle| m \in \mathbb{N} \right\}$ basis lokal terhitung pada p_2 dengan $c \gg 0, c \in E$.

Definisikan $\beta_p = \beta_{p_1} \times \beta_{p_2}$.

Akan ditunjukkan bahwa $\beta_p$adalah basis lokal terhitung pada p.

Misal $G \subset X_1 \times X_2$ buka dengan $p \in G$ maka $G = G_1 \times G_2$ untuk suatu G_1buka X_1 dan G_2 buka di X_2 dengan $p_1 \in G_1$ dan $p_2 \in G_2$. Karena β_{p_1} basis lokal pada p_1 berdasarkan Definisi 1.5, maka terdapat $B_{\delta_1\left(\frac{c}{n_0}\right)}(p_1) = S\left(p_1, \delta_1\left(\frac{c}{n_0}\right)\right) \in \beta_{p_1}$

sedemikian sehingga $B_{\delta_1\left(\frac{c}{n_0}\right)}(p_1) = S\left(p_1, \delta_1\left(\frac{c}{n_0}\right)\right) \subset G_1$.

Karena Karena β_{p_2} basis lokal p_2 , berdasarkan Definisi 1.5 maka terdapat

$$B_{\delta_2\left(\frac{c}{m_0}\right)}(p_2) = S\left(p_2, \delta_2\left(\frac{c}{m_0}\right)\right) \in \beta_{p_2}$$

sedemikian sehingga

$$B_{\delta_2\left(\frac{c}{m_0}\right)}(p_2) = S\left(p_2, \delta_2\left(\frac{c}{m_0}\right)\right) \subset G_2.$$

Pilih $m = maks(n_0, m_0)$ maka $B_{\delta\left(\frac{c}{m}\right)}(p) = S\left(p, \delta\left(\frac{c}{m}\right)\right) = S\left(p_1, \delta\left(\frac{c}{m}\right)\right) \times S\left(p_2, \delta\left(\frac{c}{m}\right)\right) \subset G_1 \times G_2 = G$

.

Berdasarkan Definisi 1.5 maka $\beta_p = \beta_{p_1} \times \beta_{p_2}$ adalah basis lokal pada p di $X_1 \times X_2$.

Karena β_{p_1} dan β_{p_2} terhitung, berdasarkan Lemma 1.7 maka β_p terhitung.

Selanjutnya misalkan $G_A = G \cap A$ maka $G_A = (G_1 \cap A_1) \times (G_2 \cap A_2)$. Dalam hal ini, berdasarkan Lemma 1.4 maka $G_1 \cap A_1$ dan $G_2 \cap A_2$ masing-masing buka di A_1 dan A_2. Oleh karena itu berdasarkan Definisi 1.16, maka $G_A$buka di A. Dengan kata lain $G_A = (G_1 \cap A_1) \times (G_2 \cap A_2) \in \tau_A$. Karena $p \in A$ dan $p \in G$ maka $p \in G_A$sehingga $p_1 \in G_1 \cap A_1$ dan $p_2 \in G_2 \cap A_2$.

Definisikan $\beta_{p_1}{}^* = \beta_{p_1} \cap A_1$ dan $\beta_{p_2}{}^* = \beta_{p_2} \cap A_2$. Berdasarkan Lemma 1.9 maka $\beta_{p_1}{}^*$ dan $\beta_{p_2}{}^*$ masing-masing basis lokal pada $p_1 \in A_1$ dan $p_2 \in A_2$.

Definisikan

$$\beta_p{}^* = \beta_p \cap A = \beta_{p_1} \times \beta_{p_2} \cap A$$
$$= \beta_{p_1} \cap A_1 \times \beta_{p_2} \cap A_2$$

Karena β_p adalah basis lokal pada p di $X_1 \times X_2$, berdasarkan Lemma 1.9 maka $\beta_p{}^*$

adalah basis lokal p di A. Karena β_p terhitung maka $\beta_p{}^*$ terhitung. Dengan demikian setiap elemen dari setiap subruang tutup (A, τ_A) memiliki basis lokal terhitung. Berdasarkan Definisi 1.8 maka (A, τ_A) adalah subruang tutup terhitung pertama. Ini berarti setiap subruang tutup dari ruang topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut memenuhi aksioma keterhitungan pertama. Berdasarkan Definisi 2.1 maka keterhitungan pertama pada ruang topologi hasil kali ruang metrik kerucut adalah hereditas lemah.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa setiap elemen dari setiap subruang tutup dari ruang topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut memiliki basis lokal terhitung. Ini berarti keterhitungan pertama pada topologi hasil kali dua ruang metrik kerucut merupakan bersifat hereditas lemah.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Badrulfalah, Khafsah J., Iin I. 2017. *Sifat Sub Ruang Topologi Hasil Kali Ruang Metrik Kerucut*. Jurnal Euclid, p-ISSN 2355-1712, e-ISSN 2541-4453, Vol. 4 No. 2, pp. 704–709.

[2] Goldberg, Richard. R. 1976. *Method of Real Analysis, second editions.* John Wiley and Sons, Inc.

[3] Huang, L.G; Zhang, X. 2007. *Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Co ntractive Mapping*. Journal Of Mathematical Analysis And Applications 332, No. 2, pp.1467–1468.

[4] Lipschutz, Seymour. 1981. *Theory and Problem General Topology*. McGraw-Hill, Singapore.

[5] Sabetghadam, F.; Masiha. 2009. *Some Couple Fixed Point Theorems in Cone Metric Spaces.*, Hindawi Publishing Corporations, Fixed Point Theory and Applications, No.125426.

[6] Sze-Tsen Hu. 1964. *Element of General topology*. Holden-Day, Inc.

[7] Turkoglu, D.; Abuloha, M.,. 2010. *Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems in Diametrically Contractive Mapping*, Acta Mathematica sinica 26, No. 3, pp: 489-496.