

DIAGONALISASI BENTUK KUADRATIK IRISAN KERUCUT

Yusmet Rizal

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Padang
e-mail : yusmet_abdurrahman@yahoo.co.id
DOI : 10.24036/eksakta/vol19-iss01/132

ABSTRACT

In general, the conic section equation consists of three parts, namely quadratic, cross-product, and linear terms. A conic sections will be easily determined by its shape if it does not contain cross-product term, otherwise it is difficult to determine. Analytically a cone slice is a quadratic form of equation. A concept in linear algebraic discussion can be applied to facilitate the discovery of a shape of a conic section. The process of diagonalization can transform a quadratic form into another form which does not contain crosslinking tribes, ie by diagonalizing the quadrature portion. Hence this paper presents the application of an algebraic concept to find a form of conic sections.

Keywords : conic section (conic), transformation, quadratic, diagonalization.

PENDAHULUAN

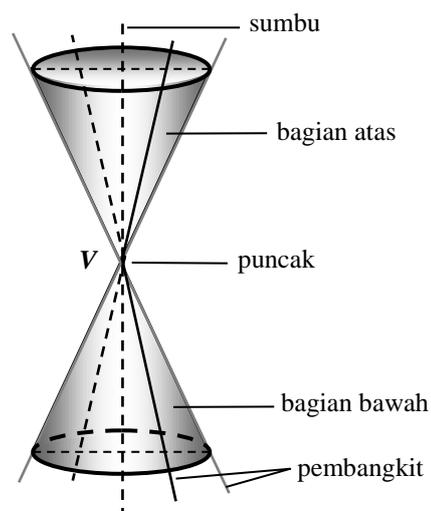
Pada bagian ini disajikan dua konsep dasar, yaitu irisan kerucut dan proses diagonalisasi matriks. Beberapa pengertian dan sifat dasar akan disajikan di sini. Melalui kajian terhadap terhadap konsep dasar ini dirancang suatu cara untuk menyelesaikan permasalahan yang diajukan.

A. Irisan Kerucut

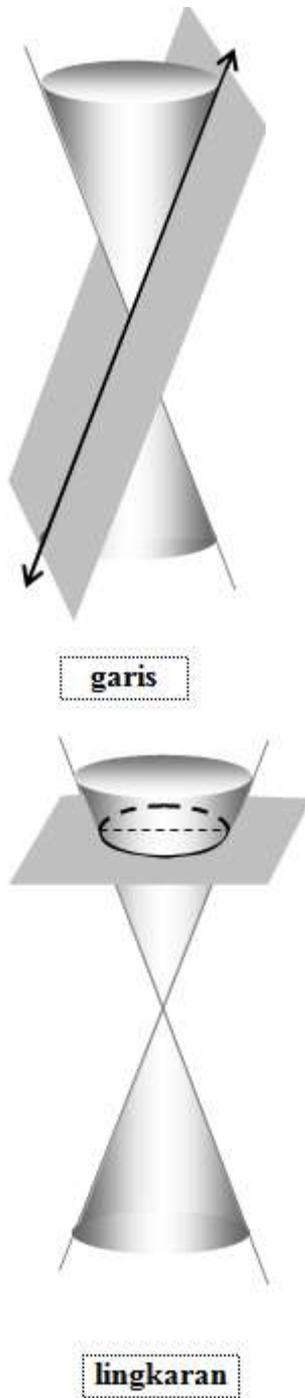
Dalam geometri irisan kerucut, suatu kerucut dapat dipandang sebagai bangun geometri yang mempunyai dua bagian, yang meluas ketakberhingga dalam dua arah. Pembahasan pada tulisan ini dibatasi pada kerucut lingkaran tegak. Sebagian kerucut lingkaran tegak yang terdiri atas dua bagian dapat dilihat pada gambar berikut.

Suatu pembangkit disebut juga elemen dari kerucut, yaitu garis yang terletak pada kerucut, dan semua pembangkit suatu kerucut melalui titik V yang dinamakan puncak.

Suatu irisan kerucut adalah kurva perpotongan antara suatu bidang dengan kerucut lingkaran tegak. Terdapat lima jenis kurva yang terjadi dari irisan tersebut, yaitu garis, lingkaran, parabola, elips, dan hiperbola seperti terlihat pada Gambar 2 berikut:



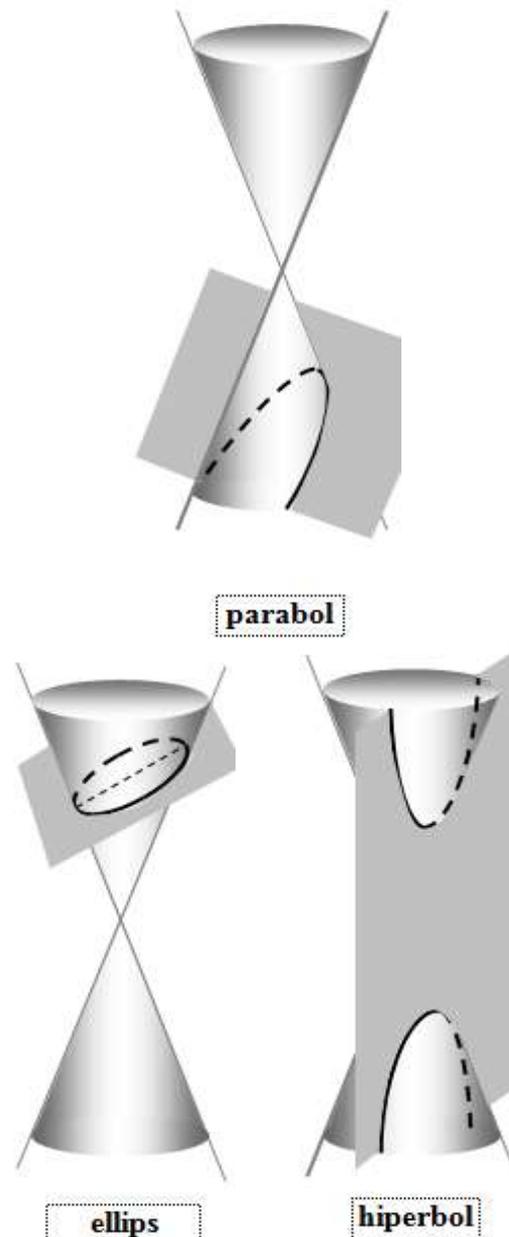
Gambar 1



Gambar 2

Garis terjadi jika bidang pemotong memuat tepat satu pembangkit. Dalam hal ini bidang pemotong juga melalui puncak kerucut. Lingkaran terjadi jika bidang pemotong tegak lurus dengan sumbu kerucut.

Parabol terjadi jika bidang pemotong sejajar dengan tepat satu pembangkit. Ellips terjadi jika bidang pemotong tidak sejajar dengan pembangkit manapun, atau bidang pemotong memotong semua pembangkit. Hiperbol terjadi jika bidang pemotong sejajar dengan dua pembangkit, sehingga bidang pemotong akan memotong kedua bagian kerucut.



Gambar 3

Suatu titik juga dapat dinyatakan sebagai suatu irisan kerucut, yaitu jika bidang

melalui titik puncak memotong kerucut secara horizontal.

Secara analitik suatu irisan kerucut dapat disajikan dengan bentuk persamaan berikut, yang disebut juga bentuk umum persamaan irisan kerucut.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \dots(1)$$

Persamaan di atas secara aljabar dapat dimanipulasi menjadi persamaan bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + B \mathbf{x} + f = 0, \dots \dots \dots (2)$$

dimana

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}.$$

Suku $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ disebut juga bentuk kuadrat yang diasosiasikan. Dalam bentuk ini kita selalu dapat memilih matriks A sebagai matriks simetris, meskipun terdapat kemungkinan lain.

Pembahasan berikutnya akan disajikan suatu sifat yang dapat mentransformasikan suatu bentuk kuadrat yang memuat suku hasilkali silang menjadi bentuk yang tidak memuat suku hasilkali silang.

B. Diagonalisasi Bentuk Kuadrat

Misalkan $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ suatu bentuk kuadrat yang diasosiasikan dari suatu persamaan irisan kerucut dengan memilih A sebagai matriks simetris. Bagian ini akan diperlihatkan bahwa, jika P suatu matriks ortogonal, maka perubahan variabel

$$\mathbf{x} = P \mathbf{y}$$

akan mengkonversikan bentuk kuadrat $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ menjadi

$$(P \mathbf{y})^T A (P \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y} \dots \dots \dots (3)$$

Karena kita memilih A matriks simetris maka matriks $P^T A P$ juga simetris, sehingga persamaan (3) adalah sebuah bentuk kuadrat baru dalam variabel-variabel \mathbf{y} . Pemilihan matriks P pada proses ini sangat menentukan agar bentuk kuadrat yang baru tidak memiliki hasilkali silang. Sifat-sifat berikut menyajikan suatu cara pemilihan matriks P .

Teorema 1

Jika A adalah matriks simetris berukuran $n \times n$ dengan nilai-nilai eigennya $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dalam urutan menurun dengan \mathbf{x} dibatasi

$\|\mathbf{x}\| = 1$ relatif terhadap perkalian dalam Euclid di R^n , maka

- a. $\lambda_1 \geq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq \lambda_n$
- b. $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda_n$ jika \mathbf{x} adalah vektor eigen dari A yang sesuai dengan nilai eigen λ_n .

Teorema 2

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka pernyataan berikut ekuivalen :

- a. A terdiagonalkan secara ortogonal,
- b. A mempunyai suatu himpunan ortonormal dari n vektor eigen.
- c. A simetris.

Teorema 3

Jika A adalah matriks simetris berukuran $n \times n$, maka :

- a. semua nilai eigen dari A adalah bilangan riil.
- b. vektor-vektor eigen dari ruang eigen yang berbeda adalah ortogonal.

Melalui sifat-sifat ini kita dapat menyusun langkah-langkah untuk

mendiagonalkan matriks simetris A , yaitu :

1. Temukan basis untuk setiap ruang eigen dari A
2. Terapkan proses Gram-Schmidt terhadap vektor-vektor basis pada ruang hasilkali dalam Euclid, sehingga diperoleh suatu basis ortonormal.
3. Bentuk matriks P dengan kolom-kolomnya adalah vektor-vektor pada basis yang diperoleh pada langkah 2. Matriks ini akan mendiagonalkan A secara ortogonal.

Teorema 4

Misalkan $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ adalah bentuk kuadrat dalam variabel-variabel di \mathbf{x} , dimana A adalah matriks simetris. Jika P mendiagonalisasi A secara ortogonal, dan $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, maka diperoleh bentuk kuadrat

$$\mathbf{y}^T D \mathbf{y}, \dots \dots \dots (4)$$

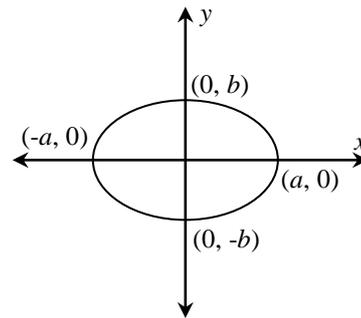
dengan D adalah matriks diagonal dengan entri-entri diagonal utamanya adalah nilai eigen yang sesuai.

Bentuk pada persamaan (4) diatas tidak memiliki suku-suku hasilkali silang. Dengan demikian, jika diterapkan pada bentuk kuadrat yang diasosiasikan pada suatu persamaan irisan kerucut maka persamaan (4) merupakan bentuk kuadrat yang diasosiasikan pada suatu bentuk kanonik (standar) irisan kerucut.

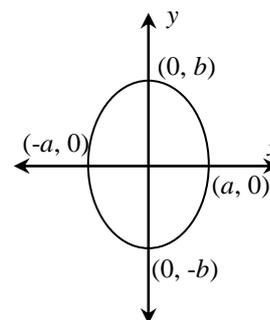
Berikut bentuk-bentuk kanonik masing-masing irisan kerucut:

1. Ellips atau lingkaran

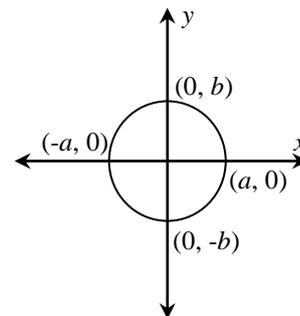
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a, b > 0$$



$a > b$



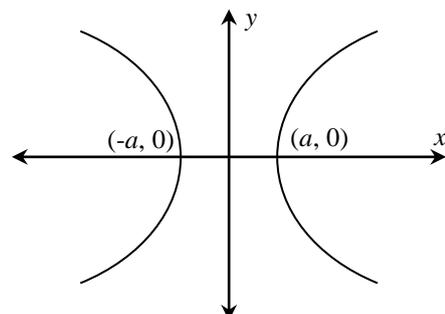
$a < b$

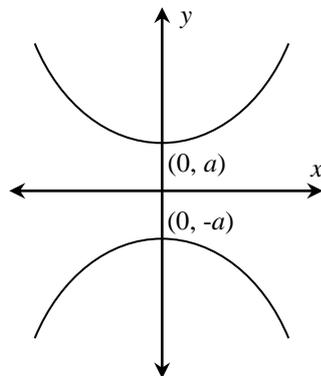


$a = b$

2. Hiperbola

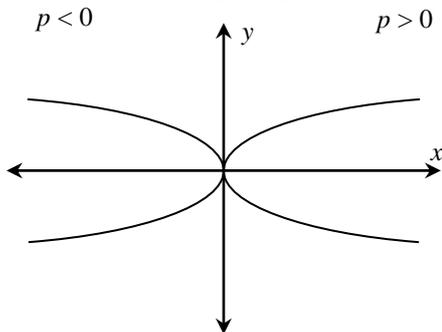
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ atau } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1; \quad a, b > 0$$



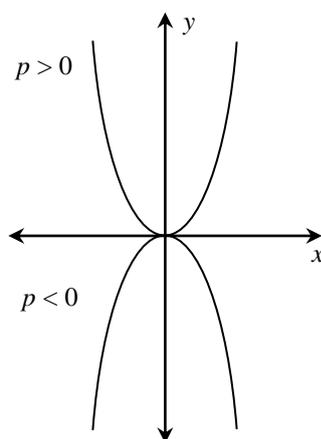


3. Parabola

$$y^2 = px, \quad p \neq 0$$



$$x^2 = py, \quad p \neq 0$$



Gambar 4

Jadi, dengan menerapkan proses diagonalisasi pada bentuk kuadratik suatu irisan kerucut tertentu, maka akan diperoleh salah satu dari bentuk standar di

atas. Dengan demikian kita dapat menggambarkan dengan mudah irisan kerucut tersebut.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dimulai dari hasil studi pustaka dengan mempelajari beberapa karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk jurnal, bulletin ataupun buku. Dari data-data atau konsep yang telah dikumpulkan, dilakukan proses analisis dengan cara menghubungkan satu atau beberapa konsep dengan kaidah matematika yang benar. Kemudian merumuskan suatu konsep yang diperoleh dari hasil hubungan tersebut. Sehingga diperoleh hasil berupa langkah-langkah untuk mendiagonalisasi bagian kuadratik dari suatu persamaan irisan kerucut, sehingga diperoleh persamaan irisan kerucut yang bebas dari suku hasilkali silang. Akibatnya bentuk irisan kerucut dengan mudah dapat digambarkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan persamaan bentuk matriks irisan kerucut berikut

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x} + f = 0, \dots\dots\dots (5)$$

dimana

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [d \quad e].$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa irisan kerucut tersebut berada dalam bidang koordinat xy . Kita akan mentransformasikan sumbu xy , sehingga masing-masing sumbu dari irisan kerucut sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat yang baru. Ini dapat diperoleh dengan merotasikan sumbu koordinat xy menjadi sumbu koordinat $x'y'$, sehingga persamaan irisan kerucut yang berada pada sistem koordinat $x'y'$ tidak mengandung suku hasilkali silang.

Berikut uraian dari langkah-langkah yang dilakukan.

Langkah 1:

Cari sebuah matriks

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

yang secara ortogonal mendiagonalisasi A.

Langkah 2:

Pertukarkan kolom-kolom dari P, jika diperlukan untuk menjadikan $\det(P) = 1$ untuk menjamin bahwa transformasi koordinat ortogonal

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

yaitu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \dots\dots\dots$$

(6)

adalah suatu rotasi.

Langkah 3:

Untuk mendapatkan persamaan irisan kerucut di dalam sistem $x'y'$ substitusikan (6) ke dalam (5). Hal ini menghasilkan

$$(P\mathbf{x}')^T A (P\mathbf{x}') + B(P\mathbf{x}') + f = 0$$

atau

$$(\mathbf{x}')^T (P^T A P) \mathbf{x}' + (BP) \mathbf{x}' + f = 0. \dots$$

(7)

Karena P secara ortogonal mendiagonalisasi A, maka

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

dimana λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari A. Sehingga (7) dapat dituliskan kembali sebagai

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

atau

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 (\dots\dots)$$

(8)

dimana $d' = dp_{11} + ep_{21}$ dan $e' = dp_{12} + ep_{22}$. Persamaan (8) tidak memiliki suku hasilkali silang.

Contoh :

Gambarkan irisan kerucut dengan persamaan $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$.

Penyelesaian :

Bentuk matriks dari

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

adalah

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - 36 = 0$$

dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Misalkan λ adalah nilai eigen dari matriks simetris A. Maka

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^2 -$$

$$13\lambda + 36 = (\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

sehingga diperoleh nilai eigen dari A adalah $\lambda = 9$ dan $\lambda = 4$.

Jika \mathbf{x} vektor eigen yang sesuai nilai eigen $\lambda = 9$, maka $A\mathbf{x} = 9\mathbf{x}$ atau

$$(9I - A)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}y = 0$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t, \text{ dengan } t \text{ parameter.}$$

Jika \mathbf{x} vektor eigen yang sesuai nilai eigen $\lambda = 4$, maka $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ atau

$$(4I - A)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0,$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} s, \text{ dengan } s$$

parameter.

Sehingga diperoleh vektor-vektor pada basis ruang eigen, yaitu

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dilakukan proses Gram-Schmidt terhadap vektor-vektor tersebut untuk mendapatkan matriks P yang mendiagonalisasi A secara ortogonal. Misalkan vektor p_1 dan p_2 adalah hasil dari proses tersebut, maka

$$p_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, p_1 \rangle p_1}{\|v_2 - \langle v_2, p_1 \rangle p_1\|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

dimana

$$P = [p_2 \ p_1] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Susunan kolom dari P disesuaikan agar $\det(P) = 1$. Karena itu transformasi koordinat ortogonal

$$\mathbf{x} = P\mathbf{x}'$$

adalah sebuah rotasi. Dengan menerapkan persamaan (7) diperoleh

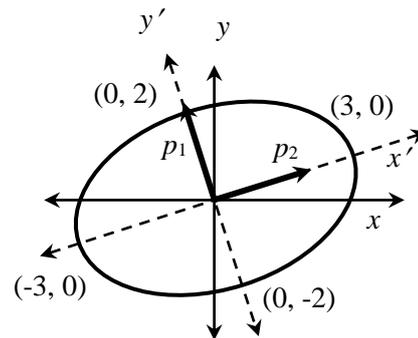
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 36 = 0$$

atau

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0 \text{ atau } \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1,$$

yang merupakan persamaan elips. Vektor p_1 dan p_2 berturut-turut adalah vektor pada sumbu koordinat $x'y'$. Sehingga diperoleh gambar irisan kerucut pada Gambar 5.

Jika irisan kerucut yang ditransformasikan tidak berpusat di titik asal $(0, 0)$, kita cukup melakukan langkah rotasi di atas. Selanjutnya kita dapat menerapkan cara yang biasa ketika menggambarkan suatu irisan kerucut yang berpusat di titik (a, b) , atau kita dapat melanjutkan dengan langkah berikutnya yaitu melakukan translasi terhadap sistem koordinat $x'y'$.



Gambar 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan diatas dapat ditarik beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Setiap persamaan irisan kerucut memiliki suatu bentuk kuadratik yang dapat ditransformasikan menjadi bentuk kuadratik yang tidak memiliki suku-suku perkalian silang dengan melakukan proses diagonalisasi matriks.
2. Suatu irisan kerucut bentuk kanonik (standar) tidak memiliki suku-suku perkalian silang.

3. Suatu irisan kerucut yang memiliki suku perkalian silang mengindikasikan bahwa irisan kerucut tersebut diputar sehingga keluar dari posisi standarnya.

Berdasarkan uraian di atas hingga kesimpulan dapat dipahami bahwa setiap bentuk kuadratik dapat ditransformasikan menjadi bentuk kuadratik yang lebih sederhana. Suatu irisan kerucut memuat bentuk kuadratik dengan dua variabel. Begitu juga dengan permukaan kuadrik memiliki bentuk kuadratik yang diasosiasikan dengan tiga variabel. Karena itu bagi peminat aljabar dan geometri dapat pula melanjutkannya pada permukaan kuadrik.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard., 1994, *Elementary Linear Algebra* : Applications Version, John Wiley & Sons, New York.
- Eves, Howard, 1972, *A Survey of Geometry*, Allyn and Bacon Wesley, London.
- Moise, Edwin E., 1990, *Elementary Geometry*, Addison - Wesley, New York.
- Morrill, W. K., 1964, *Analytic Geometry*, Second edition, International Textbook Company, Pennsylvania.
- Wallace, Edward C., 1992, *Roads to Geometry*, Prentice Hall, New Jersey.